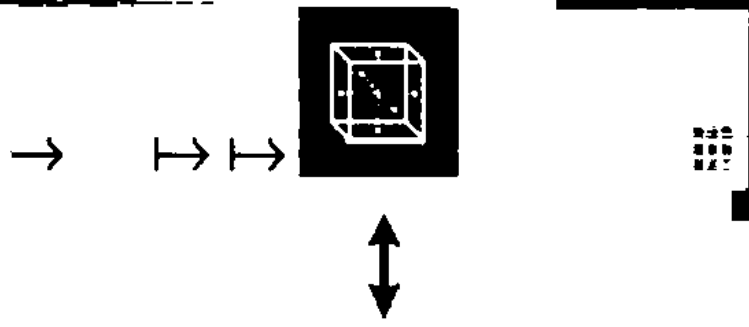
Ronaldo Fiani

Teoria dos Jogos



Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais

Contém exercícios resolvidos

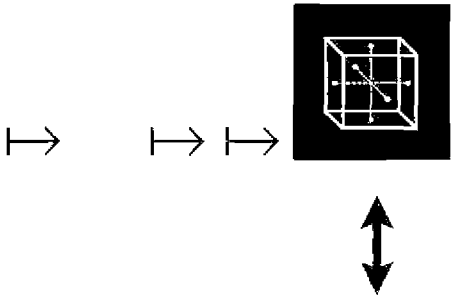
CAMPUS

Terceira Edição

Material do Professor na WEB

Ronaldo Fiani

Teoria dos Jogos



Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais

Terceira Edição
8ª tiragem

ELSEVIER

CAMPUS

Para meu pai (*in memoriam*) e meu padrasto (*in memoriam*),
que sempre estiveram presentes. E para minha mãe,
pela lição de esperança.

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer ao meu mestre, que primeiro me apresentou ao fascinante mundo dos jogos, Luís Otávio de Figueiredo Façanha. Em seguida gostaria de fazer um agradecimento especial a Sheila Najberg, Antônio Marcos Ambrózio e Maria Isabel de Toledo Andrade, que leram e comentaram vários pontos da primeira versão de *Teoria dos Jogos: para cursos de administração e economia*.

Ao cientista político Carlos Pereira e ao capitão-de-mar-e-guerra Valdecilio Pinheiro Linhares, meu agradecimento pelas conversas que me convenceram do interesse de teoria dos jogos para além da economia e da administração de empresas. Carlos Pereira, em especial, fez vários comentários úteis que procurei incorporar neste livro.

Um agradecimento a Raul Antonio Mourão Vieira, que proporcionou uma oportunidade ímpar para a discussão das ideias deste livro ao longo de um curso com executivos da Petrobras. Um agradecimento especial a João Fernando Monteiro Campos, pelos comentários e críticas que me fizeram melhorar a segunda edição. As respostas dos exercícios na 3ª edição muito devem à inestimável ajuda de Amir Szuster. O professor Fábio Waltenberg apontou incorreções na segunda edição, pelo que sou muito agradecido.

Erros e omissões que porventura permaneçam são, obviamente, de total responsabilidade do autor.

Sumário

Introdução **xiii**

1 Por Que Estudar Teoria dos Jogos? **1**

O Interesse por Jogos 1
Entendendo a Lógica da Situação: a Batalha do Mar de Bismarck 2
As Vantagens de Estudar Teoria dos Jogos 9
Quando Estamos Jogando 12
Algumas Situações que Podem ser Estudadas como Jogos 14
A Teoria da Escolha Racional 23
Jogando com as Preferências: O Paradoxo de Condorcet 27
Afinal, a Vida é um Jogo? 30
Uma Muito Breve História da Teoria dos Jogos 34
Exercícios 39

2 Modelos de Jogos: Representando uma Situação de Interação Estratégica **41**

Introdução 41
Representando as Ações dos Jogadores e suas Consequências 43
Empregando a Forma Estratégica ou Normal para Representar um Jogo Simultâneo 46
Empregando a Forma Estendida para Representar um Jogo Sequencial 50
Estratégias e Conjuntos de Informação 56
Forma Estratégica *versus* Forma Estendida 64
Exercícios 72

3 Jogos Simultâneos: Encontrando as Melhores Respostas Estratégicas **79**

Introdução 79
Uma Primeira Busca da Solução do Jogo: Eliminando Estratégias Estritamente Dominadas 81
Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas 84

Estratégias Racionalizáveis e Melhor Resposta 88
A Limitação do Método de Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas 91
Solucionando um Jogo Simultâneo: o Equilíbrio de Nash 93
Equilíbrio de Nash Estrito 98
Equilíbrio em Estratégias Estritamente Dominantes e Equilíbrio de Nash Estrito 99
Equilíbrio de Nash e Ótimo de Pareto 102
Um Caso de Mais do que um Equilíbrio de Nash 103
Selecionando entre Vários Equilíbrios de Nash na Prática: o Conceito de Ponto Focal 106
Um Caso em que Não Há Equilíbrio de Nash 108
Alguns Jogos Importantes 109
Exercícios 116

4 Aplicando o Equilíbrio de Nash: Interagindo Estrategicamente 121
Introdução 121
O Modelo de Cournot (ou de Determinação Simultânea de Quantidades) 122
O Modelo de Cournot com Duas Empresas 122
O Modelo de Cournot e a Eficiência de Pareto: o Cartel 126
O Modelo de Cournot com Mais de Duas Empresas 130
O Modelo de Bertrand (ou de Determinação Simultânea de Preços) 134
O Modelo de Bertrand sem Restrição de Capacidade 134
O Modelo de Bertrand com Restrição de Capacidade: o Paradoxo de Edgeworth 138
O Modelo de Bertrand com Diferenciação de Produtos 142
O Jogo da Localização 147
O Jogo da Localização sem Custos de Transporte 147
O Jogo da Localização com Custos de Transporte 158
O Problema dos Recursos Comuns 164
Exercícios 168

5 Jogos Estritamente Competitivos e Estratégias Mistas: Prevenindo-se no Conflito 171
Introdução 171
De Volta à Batalha do Mar de Bismarck 172
Os Jogos Estritamente Competitivos ou Jogos de Soma Zero 173
Analisando o Equilíbrio em Jogos Estritamente Competitivos: Minimax e Maximin 179
O Jogo do Apadrinhamento 185
Estratégias Mistas em Jogos Estritamente Competitivos 191
Uma Aplicação de Estratégias Mistas a Jogos Não Estritamente Competitivos 206
Exercícios 212

6 Jogos Sequenciais: Avaliando Ameaças e Promessas 215
Introdução 215
Os Limites do Equilíbrio de Nash em um Jogo Sequencial: o Jogo da Entrada 216
O Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos 221
O Método da Indução Reversa 231
Quando Acreditar (ou Não) em Ameaças e Promessas 234
Tornando Ameaças e Promessas Críveis: Movimentos Estratégicos 241
Jogos Sequenciais de Estratégias Contínuas 250
O Modelo de Liderança de Quantidades (Stackelberg) 250
O Modelo de Liderança de Preços: um Caso de Conluio Tácito 252
Exercícios 255

7 Jogos Repetidos: Induzindo a Cooperação 259
Introdução 259
Aplicando Jogos Repetidos a Cartéis 261
O Problema da Cooperação em Jogos Repetidos Finitos 267
Equilíbrio Perfeito em Subjogos em Jogos Repetidos Finitos 271
Jogos Infinitamente Repetidos: Tentando Promover a Cooperação 278
Há Muitas Possibilidades de Cooperação 291
De Volta ao Problema da Estabilidade dos Cartéis 297
Exercícios 299

8 Jogos Simultâneos de Informação Incompleta: Desenho de Leilões 301
Introdução 301
O Equilíbrio de Nash Bayesiano 305
O Modelo de Cournot com Informação Incompleta 314
Desenho de Mecanismo 316
O Princípio da Revelação 325
Uma Aplicação de Jogos de Informação Incompleta: Leilões 327
Elementos Básicos de Leilões 328
O Leilão Simultâneo de Envelopes Lacrados 330
O Leilão de Vickrey ou de Segundo Preço 334
Leilão Holandês, Leilão Inglês e Equivalência Estratégica entre Leilões 336
Leilões de Valor Comum e a Maldição do Vencedor 338
Exercícios 339

9 Outros Jogos de Informação Assimétrica: Equilíbrio Perfeito Bayesiano e Sinalização **343**

Introdução 343

Equilíbrio Bayesiano Perfeito 343

O Teorema de Bayes 344

O Equilíbrio Perfeito Bayesiano em Jogos Sequenciais de Informação Incompleta 348

Jogos de Sinalização 355

Exercícios 360

Respostas de Exercícios **363**

Bibliografia Sugerida **385**

Índice **389**

Introdução

Você pode descobrir mais sobre uma pessoa em uma hora de jogo do que em um ano de conversa.

PLATÃO, FILÓSOFO GREGO (427 a.C. – 347 a.C)

Inicialmente, gostaria de agradecer aos professores, estudantes e leitores interessados em teoria dos jogos pelo sucesso do livro *Teoria dos Jogos: para cursos de administração e economia*, do qual este livro é uma sequência. A grande aceitação pelo público de *Teoria dos Jogos: para cursos de administração e economia* não apenas confirmou que a teoria dos jogos é um tema de grande importância e que deve ser estudado em cursos de graduação de economia e administração de empresas, mas também demonstrou que ela interessa a cientistas políticos, sociólogos, militares etc.

Este livro é uma tentativa de atender a esse interesse. Nesse sentido, representa bem mais do que uma nova edição de *Teoria dos Jogos: para cursos de administração e economia*. Trata-se, na verdade, de uma ampliação do escopo e dos objetivos do livro. Agora, nosso interesse é difundir os conhecimentos de jogos para todos aqueles que lidam com situações em sua atividade profissional nas quais a presença da estratégia é importante.

Não que a utilidade da teoria dos jogos para além da economia e dos negócios empresariais seja novidade. Pelo contrário, nos Estados Unidos e na Europa há muitos anos já se reconhece a importância da teoria dos jogos na política e nas relações sociais, assim como nas atividades de natureza militar. O interesse dos profissionais das mais diferentes áreas, no Brasil, em relação à teoria dos jogos apenas repete um padrão que já é muito conhecido no exterior.

Todavia, não se esperava que isso ocorresse de forma tão rápida. A boa recepção de *Teoria dos Jogos: para cursos de administração e economia*, não

apenas nas faculdades de Economia e Administração, como também em outras áreas, e de forma bastante rápida, nos surpreendeu e muito nos alegrou. Além disso, nos impôs um desafio: preparar uma nova obra que desse conta de um interesse tão diversificado, sem, contudo, esquecer os economistas e administradores de empresas, que ainda são os principais interessados nesse campo de conhecimento.

Este é então o objetivo deste livro: levar a teoria dos jogos para economistas, administradores, cientistas políticos, militares e todos aqueles que tenham interesse em conhecer como a interação entre indivíduos ou organizações, que agem estrategicamente de acordo com os seus interesses, pode ser estudada objetivamente por meio de métodos matemáticos.

Isso nos leva à questão do nível do conhecimento matemático que é necessário para ler este livro. Para a maior parte dos assuntos apresentados, os conhecimentos de matemática adquiridos no ensino médio são suficientes.

Nos Capítulos 5, 8 e 9, principalmente neste último, alguma familiaridade com probabilidades pode ser útil, mas não consideramos esse conhecimento um pré-requisito: nesses capítulos apresentamos os princípios básicos de probabilidade ao longo do texto, de forma que mesmo o leitor pouco familiarizado com probabilidades possa acompanhar a apresentação.

Ainda com relação aos conhecimentos matemáticos, os Capítulos 4, 6, 8 e 9 envolvem a aplicação de cálculo de derivadas em sua forma mais simples, na maior parte das vezes em aplicações de modelos econômicos. Assim, a falta de conhecimento de cálculo não deve ser um obstáculo ao leitor que deseje conhecer teoria dos jogos, e que não tenha uma formação na qual o cálculo seja objeto de estudo.

O ícone ao lado do título de uma seção indica ao leitor que aquela seção exige conhecimentos de cálculo.

Na introdução à primeira edição de *Teoria dos Jogos: para cursos de administração e economia* afirmava-se que havia poucos títulos sobre teoria dos jogos publicados no Brasil. Hoje a situação se alterou um pouco, mas o número de títulos ainda é muito pequeno. Isso continua sendo algo surpreendente, não apenas pelo fato de que teóricos de jogos foram agraciados por duas vezes com o Prêmio Nobel de Economia (em 1994 e 2005), mas principalmente quando se considera o enorme volume de títulos publicados no exterior sobre o tema.

Os capítulos do livro estão organizados da seguinte forma: o Capítulo 1 discute como aplicar teoria dos jogos a uma situação de interação estratégica, e os limites dessa aplicação. A teoria dos jogos não deve ser aplicada a qualquer situação de interação estratégica, mas somente às situações em que os agentes buscam agir de forma racional. Começaremos a raciocinar estrategicamente a partir de uma fato histórico: a batalha do mar de Bismarck, na Ásia, em 1943.

No Capítulo 2, estudaremos como modelar uma situação de interação estratégica em que os agentes se comportam da forma estudada no Capítulo 1. Veremos que, sendo um campo que aplica conhecimentos e métodos de natureza matemática, a teoria dos jogos impõe algumas regras precisas de modelagem que devem ser empregadas.

No Capítulo 3 discutiremos o importante conceito de equilíbrio de Nash e a forma pela qual é possível solucionar um jogo simultâneo. Veremos situações de interação estratégica que são amplamente citadas na literatura econômica, de empresas e em política: o dilema do prisioneiro, a batalha dos sexos, o jogo do "galinha" etc. – uma série de situações-padrão que são empregadas na análise de vários tipos de interação entre indivíduos, organizações etc.

O Capítulo 4 trata de uma série de aplicações do equilíbrio de Nash, em particular a modelos em que os jogadores dispõem de estratégias contínuas. Vamos analisar os modelos de oligopólios tradicionais: Cournot e Bertrand, tanto em suas versões clássicas, quanto em versões com variantes. Veremos também o jogo de localização, que, aplicado à política, dá origem ao teorema do eleitor mediano, e a tragédia dos comuns, muito citada em análise de esgotamento de recursos naturais.

O Capítulo 5 traz a discussão sobre jogos estritamente competitivos, também conhecidos como jogos de soma zero, e estratégias mistas. Poderemos então analisar com um pouco mais de formalização o jogo da batalha do mar de Bismarck, que discutimos no primeiro capítulo, e algumas características importantes do processo de interação estratégica entre Estados Unidos e a extinta União Soviética, que ficou conhecido como Guerra Fria.

No Capítulo 6 discutiremos o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, que é a base para avaliar quando uma ameaça ou promessa deve ser levada a sério. Veremos que nem todas as ameaças ou promessas são críveis, ou seja, devem ser acreditadas. Veremos também que os jogadores podem agir estrategicamente para torná-las críveis.

O Capítulo 7 trata de jogos repetidos, que são um instrumento essencial para entender por que, em algumas situações, a cooperação entre os jogadores surge espontaneamente, enquanto, em outras, isso não acontece. Em que situações as empresas cooperam espontaneamente e, mesmo sem ter nenhum con-

1

Por Que Estudar Teoria dos Jogos?

Os franceses pensam que a vida é um jogo.
Os ingleses pensam que críquete é um jogo...
(ANÔNIMO)

O INTERESSE POR JOGOS

Todos nós, em algum momento da nossa infância, tivemos contato com algum jogo: um jogo de salão, mais modernamente os jogos eletrônicos ou uma disputa esportiva. Fosse uma brincadeira de criança ou algo mais elaborado, como um campeonato de xadrez, todos nós já participamos de alguma espécie de jogo. Mesmo depois de adultos, alguns jogos, como o futebol, continuam despertando paixões. De certa forma, principalmente como recreação, jogos são algo tão presente no nosso dia-a-dia que os encaramos como algo natural. A maioria das pessoas, provavelmente, não considera os jogos algo a ser estudado seriamente.

Contudo, refletindo um pouco, veremos que em nossa linguagem corrente com frequência tratamos como se fossem "jogos" atividades bem mais sérias do que aquelas que praticamos nos momentos de lazer. Isso fica evidente quando empregamos expressões do tipo "o jogo da política internacional", "o jogo da livre concorrência" etc., o que parece sugerir que há algo em comum entre negociações internacionais, decisões estratégicas de executivos de empresas competidoras e uma partida de xadrez.

De fato, isso realmente ocorre – existe uma característica importante presente ao mesmo tempo em uma partida de xadrez, em um encontro internacional de líderes para discutir medidas de não-proliferação nuclear e nas decisões de empresários quanto ao lançamento de um novo produto para competir com

produtos semelhantes: o fato de os indivíduos e as organizações tomarem suas decisões em uma situação de *interação estratégica*.

Uma situação de *interação estratégica* é aquela em que participantes, sejam indivíduos ou organizações, reconhecem a interdependência mútua de suas decisões.

Dessa forma, sempre que um conjunto de indivíduos, empresas, partidos políticos etc., estiver envolvido em uma situação de interdependência recíproca, em que as decisões tomadas influenciam-se reciprocamente, pode-se dizer que eles se encontram em um "jogo". No próximo capítulo definiremos com maior precisão o que é um jogo, mas esperamos já ter dado uma noção do tipo de situação que irá nos interessar daqui por diante.

Assim, situações nas quais há interação estratégica podem ser caracterizadas como "jogos". A questão agora é se existe alguma maneira de analisar e conhecer melhor os possíveis desdobramentos desse tipo de situação, em que há interação estratégica. É exatamente aqui que a teoria dos jogos entra em cena. Vamos ilustrar para o quê serve a teoria dos jogos utilizando como exemplo uma das mais importantes batalhas da Segunda Guerra Mundial: a batalha do mar de Bismarck.

ENTENDENDO A LÓGICA DA SITUAÇÃO: A BATALHA DO MAR DE BISMARCK

Em dezembro de 1942 o alto comando de guerra japonês decidiu transferir um maciço reforço da China e do Japão para Lae, em Papua- Nova Guiné. Isso permitiria aos japoneses se recuperarem da derrota de Guadacanal e se prepararem para a próxima ofensiva aliada. Contudo, a movimentação de um volume grande de tropas por mar tinha um risco elevado: o poderio aéreo aliado na área era fortíssimo.

Mesmo assim os japoneses reuniram oito destróieres, oito transportadores de tropas e mais cem aviões de escolta para a operação. A frota japonesa partiu de Rabaul, também em Papua-Nova Guiné, em 28 de fevereiro de 1943, transportando em torno de 6.900 soldados para reforçar suas linhas de defesa em Lae, e navegando à velocidade máxima.

Um dado importante da situação era o fato de que o comboio japonês dispunha de duas rotas alternativas: a rota pelo sul, que apresentava tempo bom e boa visibilidade, e a rota pelo norte, que apresentava tempo ruim e baixa visibilidade. As forças aliadas, por outro lado, somente possuíam aviões de reconhe-

cimento para pesquisar uma rota por vez, sendo que a busca em qualquer uma das rotas consumia um dia inteiro.

Dessa forma, se as forças aliadas enviassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque em seguida. Porém, se mandassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeios. Os aliados também sabiam que se os japoneses escolhessem o sul e fossem localizados de imediato, o bom tempo garantiria três dias de bombardeio. Todavia, se os japoneses tivessem escolhido a rota norte, mesmo que os aliados os localizassem logo no primeiro dia de buscas, o mau tempo permitiria apenas dois dias de bombardeio.

A melhor situação para a aviação aliada aconteceria se os aliados enviassem os aviões de reconhecimento para a rota sul e os japoneses tivessem escolhido essa rota. Nesse caso, seria possível atacar o comboio durante três dias. A pior situação para os aliados seria se os japoneses tivessem ido pelo norte e os aviões de reconhecimento fossem enviados no primeiro dia para a rota sul: os aliados perderiam um dia por iniciar a busca na rota errada e mais outro dia pelo mau tempo da rota norte, dispondo apenas de um dia para bombardear o comboio.

Caso os japoneses tivessem escolhido a rota norte e os aliados também mandassem seus aviões iniciarem a busca por essa rota, os aliados perderiam apenas um dia de bombardeio devido ao mau tempo, tendo dois dias a sua disposição para atacar o comboio. Por último, se os japoneses escolhessem o sul e os aliados começassem sua busca pelo norte, perderiam um dia em função do engano e teriam dois dias de bombardeio efetivo à disposição.

Se você fosse do comando aéreo aliado, o que faria?

Em 1º de março o comboio japonês foi avistado por um bombardeiro de patrulha B-24 Liberator. No primeiro dia de buscas os aliados tinham enviado seus aviões de reconhecimento para a rota norte e encontraram os japoneses ainda no primeiro dia. Após esse primeiro contato, bombardeiros pesados norte-americanos foram enviados, mas não conseguiram localizar o comboio japonês, devido ao mau tempo.

No dia 2 de março houve novo contato visual com o comboio e vários B-17 Fortalezas Voadoras atacaram, afundando navios de suprimento e transporte. De 1.500 soldados que estavam sendo transportados em um dos navios, cerca de 700 morreram. Dois destróieres (o *Yukikaze* e o *Asagumo*) se anteciparam ao comboio para desembarcar os sobreviventes que conseguiram recolher em Lae, retornando mais tarde. Enquanto isso, ao entardecer e durante a noite do dia 2, o comboio sofreu bombardeios esporádicos.

O dia 3 de março foi um dia de ataques incessantes. Inicialmente, às 10 horas da manhã, Fortalezas Voadoras bombardearam os navios japoneses a média al-

titude, forçando os navios do comboio a se dispersarem para reduzir os danos, o que atrasou a viagem. Em seguida, 13 Beaufighters atiraram com seus quatro canhões de 20 milímetros e seis metralhadoras, danificando as armas antiaéreas dos navios japoneses, comprometendo os tombadilhos e provocando grandes baixas nas tripulações. Seguiram-se bombardeios de 13 US B-25 Mitchells, lançamento de torpedos de aviões B-25 modificados para ataques a baixa altitude, ataques de aviões USAAF A-20 e novos bombardeios de B-17. À tarde, houve mais ataques com aviões Mitchells e RAAF Bostons.

Todos os transportadores de tropas foram afundados, juntamente com os destróieres *Shirayuki*, *Arashio* e *Tokitsukaze*. O destróier *Asagumo* foi afundado posteriormente, ao se envolver em novo combate enquanto recolhia sobreviventes do *Arashio*. Mesmo depois da batalha encerrada, após dois dias de bombardeios, seguindo ordens dos comandantes aliados, aviões e navios atacaram os navios de resgate japoneses, assim como sobreviventes que flutuavam em botes salva-vidas ou nadavam no mar. Apesar de ser uma evidente quebra da Convenção de Genebra, os aliados justificaram sua ação afirmando que os sobreviventes, se resgatados, poderiam ser rearmados e enviados à linha de combate.

Apenas quatro destróieres conseguiram recuar de volta até o ponto de partida, em Rabaul: a batalha tinha sido um desastre para o Japão. Não apenas foram perdidos todos os navios de transporte e quatro destróieres: apenas 800 soldados conseguiram chegar a seu destino em Lae. Calcula-se a perda de soldados e marinheiros japoneses em cerca de 2.900 homens.

Como os aliados encontraram os japoneses logo no primeiro dia de busca?

Sem dúvida seria muito difícil responder a essa pergunta considerando *toda* a complexidade das circunstâncias que envolveram a batalha, da qual somente listamos alguns dados. Na verdade, em geral as situações de interação estratégica, tenham ou não o caráter dramático de uma batalha de guerra, são situações muito complexas e de difícil análise simplesmente observando-se os dados da situação. O que necessitamos para poder afirmar algo acerca de qualquer situação de interação estratégica em geral, e acerca da batalha de Bismarck em particular, é de um *modelo*.

Um modelo nada mais é do que uma representação *simplificada* de um objeto de estudo, no caso, de uma situação de interação estratégica, em que a situação é apresentada de forma simplificada, em que *propositadamente alguns elementos são destacados, enquanto outros são omitidos*. A seleção dos elementos a serem destacados ou omitidos *não é arbitrária*: omitimos os fatos que consideramos pouco importantes, ou até mesmo irrelevantes para a compreensão do que está sendo estudado, ao mesmo tempo em que destacamos aquilo que consideramos essencial e decisivo para o entendimento do nosso objeto de estudo.

Fazemos isso porque a realidade sempre envolve um elevado grau de complexidade, de tal forma que dificilmente conseguiríamos entender os fatos se tentássemos dar conta de todos os detalhes. É claro que isso envolve um risco: temos de ser criteriosos no momento de distinguir quais elementos devem ser destacados por sua importância e quais devem ser omitidos por serem pouco relevantes. Se, por algum equívoco, forem destacados elementos que não são muito importantes para o entendimento da situação e sua posterior análise e/ou, forem omitidos elementos importantes, corre-se o risco de chegar a conclusões totalmente equivocadas.

Felizmente a teoria dos jogos nos oferece tanto algumas formas de modelar uma situação de interação estratégica quanto de analisar essas situações, após elas terem sido modeladas. Eis um modelo muito simples que poderíamos utilizar para a análise da batalha do mar de Bismarck, representado na tabela a seguir (Figura 1.1):

Na Figura 1.1, listamos os dias de bombardeio de acordo com a combinação de estratégias escolhidas pelas forças aliadas (representadas nas linhas) e pelo comboio japonês (representado nas colunas). Veja-se, por exemplo, o que teria ocorrido caso as forças aliadas tivessem escolhido iniciar sua busca pela rota sul e os japoneses tivessem enviado o comboio também pela rota sul, na célula superior esquerda da tabela: três dias de bombardeio.

O leitor poderá identificar imediatamente que a tabela tem exatamente as características de um modelo: ela omite inúmeros detalhes da batalha para se concentrar apenas naquilo que parece essencial – para onde os aliados mandaram seus aviões de reconhecimento no primeiro dia e por onde os japoneses escolheram enviar seu comboio, se pela rota norte, de mau tempo, ou pela rota sul, de bom tempo.

É fácil perceber que não há uma opção que seja imediatamente melhor para os aliados. Caso os japoneses tivessem escolhido o sul, o melhor teria sido enviar os aviões para o sul. Já na hipótese de os japoneses terem enviado o comboio pelo norte, o melhor seria enviar os aviões pelo norte. Se você fosse o comandante das forças aliadas, o que faria?

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	**Rota Sul**	**Rota Norte**
Busca Rota Sul no Primeiro Dia	3 dias de bombardeio	1 dia de bombardeio
Busca Rota Norte no Primeiro Dia	2 dias de bombardeio	2 dias de bombardeio

Figura 1.1 A Batalha do Mar de Bismarck

Com o nosso modelo simplificado, fica clara a resposta: você deveria mandar os aviões fazerem a busca no primeiro dia pela rota norte. Isso porque enquanto para os aliados a melhor estratégia dependia do que os japoneses decidissem, *para os japoneses a rota norte era a melhor escolha caso os aliados escolhessem o sul e era uma opção tão boa quanto a rota sul se os aliados escolhessem o norte!* Para entender a razão disso, basta examinar a tabela: se os aliados começassem a busca pelo sul, a escolha da rota sul acarretaria três dias de bombardeio, ao passo que a escolha da rota norte acarretaria apenas um dia de bombardeio. Já se os aliados escolhessem a rota norte, a escolha da rota sul ou da rota norte não faria diferença: ambas acarretariam dois dias de bombardeio.

Portanto, como a rota norte acarretaria um menor número de dias de bombardeio em um caso e igual número de dias de bombardeio em outro, a rota norte era a melhor opção para o comboio japonês, dado que o alto comando naval do Japão desejava, obviamente, minimizar suas perdas. Conscientes disso, os aliados enviaram seus aviões para a rota norte e o resto da história nós já contamos.

Assim, os aliados "adivinharam" por onde os japoneses viriam simplesmente considerando: (1) que os japoneses agiriam racionalmente (não se exporiam a perdas desnecessárias); e (2) os dados da situação (o número de dias de bombardeio que o tempo em cada rota permitiria). Era uma boa aposta e se mostrou bem-sucedida.

Assim, a partir de um modelo muito simples, mas que já incorpora alguns princípios de teoria dos jogos que você terá a oportunidade de estudar neste livro, fomos capazes de entender o que aconteceu na batalha do mar de Bismarck *a partir de um conjunto de dados muito pequeno*: a disponibilidade de aviões para reconhecimento dos aliados e as condições meteorológicas das duas rotas.

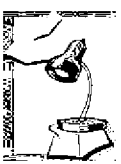
Desse modo, não foi preciso pesquisar o que se passou com o alto comando japonês e nem com o comando aéreo aliado na área para entender as opções de cada lado e as consequências da batalha.[1] Em outras palavras, nosso modelo simplificado, que já é uma aplicação da teoria dos jogos, nos permitiu entender *a lógica da situação*. Na verdade, como afirmou John McMillan, um dos objetivos da teoria dos jogos é entender a lógica da situação.

Mas o que significa "entender a lógica da situação"? Foi o filósofo austríaco Karl Popper (1902-94) quem cunhou a expressão *lógica situacional*, ao se referir ao método das ciências sociais. Em sua opinião, as ciências sociais deveriam bus-

1 No Capítulo 5, teremos a oportunidade de fazer uma análise mais formal do modelo que descreve essa batalha.

car compreender objetivamente a lógica de uma determinada situação de interação entre indivíduos, ou organizações, a partir dos *dados objetivos* dessa situação, sem analisar a subjetividade dos indivíduos envolvidos, ou seja, sem investigar os sentimentos, expectativas, desejos etc. dos indivíduos que participam das interações.

Caberia assim às ciências sociais, de acordo com Popper, *explicar as ações* praticadas em uma situação de interação entre indivíduos, ou organizações, a partir *apenas* da própria situação, sem recorrer à psicologia dos indivíduos envolvidos. Em suas próprias palavras:



> Isto nos permite compreender, então, ações em um sentido objetivo, a ponto de podermos dizer: reconhecidamente, possuo diferentes alvos e sustento diferentes teorias (de, por exemplo, Carlos Magno), mas se tivesse sido colocado nesta situação (...) então eu, e presumivelmente vocês também, teria agido de uma forma semelhante à dele. (Karl Popper, *Lógica das Ciências Sociais*, Rio de Janeiro, Tempo Brasileiro, 1999, p. 32.)

É fácil perceber que foi exatamente isso o que fizemos no caso da batalha do mar de Bismarck. Muito provavelmente nenhum de nós foi membro do alto comando naval japonês ou do comando aliado na Ásia, ou mesmo participou da batalha. Não sabemos o que se passou nas mentes dos comandantes que tomaram as decisões, ou mesmo dos milhares de soldados que lutaram ou perderam suas vidas naquele conflito.

Contudo, fomos capazes de, mesmo sem conhecer o que esses homens viveram, explicar suas ações e o desfecho da batalha. O que Popper está afirmando é que o mesmo método tem boa chance de funcionar, seja para os comandos militares da Segunda Guerra, seja para entender as ações do imperador Carlos Magno na Idade Média.

A teoria dos jogos é um excelente exemplo desse método e vamos procurar mostrar que ela se aplica a um grande número de situações e não apenas a batalhas militares: irá nos ajudar a entender, por exemplo, por que cartéis funcionam em alguns casos, mas em outros não; por que as empresas muitas vezes pagam prêmios como incentivo aos seus executivos; por que alguns leilões funcionam melhor do que outros; por que reservas de recursos naturais são depredadas; por que políticos de partidos com diferentes matizes ideológicos tendem a assumir propostas parecidas etc.

Seremos capazes de analisar tudo isso sem recorrer em nenhum momento a uma investigação sobre o que os indivíduos envolvidos nessas interações pensam ou sentem. A teoria dos jogos nos permite elaborar várias explicações para

esses e outros fenômenos da vida social, desde que haja interação entre indivíduos conscientes de que suas decisões individuais afetam a todos.

O ponto de partida da aplicação da teoria será sempre um modelo. Pode ser um modelo simples como o que empregamos na análise da batalha do mar de Bismarck ou um modelo mais complexo. Em teoria dos jogos há vários tipos de modelos, de acordo com o tipo de interação que estiver sendo analisado. Teremos oportunidade de estudar que tipo de modelo se adapta melhor a cada tipo de situação de interação estratégica.

Não é possível tratar de todas as situações de interação estratégica com o mesmo modelo, uma vez que há diferentes tipos de situações de interação: há interações que acontecem apenas uma vez e nas quais os agentes envolvidos decidem simultaneamente; outras que se repetem no tempo; outras em que os agentes envolvidos decidem em uma ordem bem-definida; outras em que alguns decidem já conhecendo as decisões dos outros agentes etc.

Todavia, independentemente do tipo de interação que estivermos estudando, o ponto de partida será sempre um modelo. A constituição de um modelo será sempre o primeiro passo da análise, como explica Roger B. Myerson:

A análise de qualquer jogo ou situação de conflito deve se iniciar com a especificação de um modelo que descreva o jogo. Assim, a forma ou a estrutura geral dos modelos que utilizarmos para descrever jogos deve ser cuidadosamente considerada. Uma estrutura de modelo que seja simples demais pode nos forçar a ignorar aspectos vitais dos jogos reais que desejamos estudar. Uma estrutura de modelo excessivamente complicada pode impedir nossa análise, obscurecendo as questões essenciais. (Roger B. Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1991, p. 37.)

Já tínhamos feito uma breve referência à importância da especificação do modelo em nossa análise da batalha do mar de Bismarck. Selecionamos então apenas dois elementos das inúmeras decisões de ambos os lados ao longo dos eventos que se sucederam antes e durante a batalha: quais as rotas que poderiam ser escolhidas pelos japoneses para enviar o comboio e em quais rotas as forças aliadas poderiam fazer o reconhecimento no primeiro dia de ataque.

Com apenas esses dois elementos fomos capazes de explicar as decisões dos aliados dos japoneses. Se tivéssemos escolhido outros elementos da mesma situação para explicar o que ocorreu, provavelmente não teríamos uma compreensão adequada das ações militares. Assim, a especificação adequada do modelo é essencial para que o objetivo de entender a lógica da situação seja alcançado.

Aqui devemos fazer uma advertência. Da discussão superficial da batalha do mar de Bismarck pode ficar a impressão de que a teoria dos jogos tem uma receita pronta para dar conta de qualquer situação de interação estratégica. Assim, qualquer que fosse o caso, haveria uma fórmula infalível de se definir o modelo, aplicá-lo ao caso concreto e encontrar a melhor maneira de se comportar estrategicamente na situação. Como se houvesse um "manual" que fornecesse respostas prontas para qualquer situação de interação estratégica.

Contudo, deve-se enfatizar que *não é nosso propósito oferecer qualquer receita pronta acerca de como se comportar em uma situação de interação estratégica na vida real.* Como explica novamente John McMillan, a decisão estratégica é, ao mesmo tempo, uma *ciência* e uma *arte*. Embora o conhecimento da ciência seja uma condição necessária se desejamos nos tornar bons estrategistas, não é o suficiente. Fazendo um paralelo com o jogo de xadrez, estudar as táticas de abertura, desenvolvimento e finalização do jogo é condição necessária para ser um bom enxadrista, mas apenas a leitura e o estudo não tornam ninguém um campeão. A *arte* da estratégia somente se desenvolve com a *experiência*.

O problema é que a experiência não apenas nos permite distinguir o que é essencial do que não é importante, ao se formular um modelo de jogo, mas também – e em alguns casos isso é essencial – vai nos permitir perceber os elementos específicos da situação que, embora possam não estar sempre contemplados na teoria, algumas vezes têm um papel decisivo no desenvolvimento de uma situação de interação estratégica.

A teoria dos jogos pode, portanto, ser um excelente guia, embora não nos forneça necessariamente uma receita pronta, uma vez que desenvolvemos nossa experiência em situações de interação estratégica. Esse é o nosso objetivo com este livro: introduzir o estudante na teoria dos jogos para que ela o ajude a entender a lógica das situações de interação estratégica enquanto ele desenvolve sua experiência como analista de casos concretos.

AS VANTAGENS DE ESTUDAR TEORIA DOS JOGOS

Assim, o estudo de teoria dos jogos possui duas vantagens. Eis a primeira delas:

A teoria dos jogos ajuda a entender *teoricamente* o processo de decisão de agentes que interagem entre si, a partir da compreensão da lógica da situação em que estão envolvidos.

O termo "teoricamente" está enfatizado pois se trata de estudar, por meio de abstrações, como se desenvolve o processo de tomada de decisão. Utilizar abs-

trações significa excluir da análise todos os fatores particulares e acidentais que podem afetar o resultado do processo em estudo, o que não quer dizer em absoluto que esses fatores não possam ser importantes na determinação do resultado final em uma situação concreta específica.

Logo, a teoria dos jogos irá permitir identificar a lógica do processo de interação estudado, *desde que sejam respeitadas as hipóteses dessa teoria, e aplicado um modelo adequado às circunstâncias específicas do caso*. Resultados muito diferentes dos previstos serão obtidos caso essas hipóteses não sejam respeitadas, ou as particularidades da situação não sejam adequadamente compreendidas. Não basta, portanto, conhecer a teoria: é preciso também saber os limites do conhecimento proporcionado pela teoria. No próximo capítulo discutiremos um pouco mais as hipóteses em que se baseia boa parte da teoria dos jogos.

Vejamos agora a segunda vantagem de estudar teoria dos jogos:

A teoria dos jogos ajuda a desenvolver a capacidade de raciocinar estrategicamente, explorando as possibilidades de interação dos agentes, possibilidades estas que nem sempre correspondem à intuição.

Explorar as possibilidades resultantes da interação estratégica entre agentes, em particular aquelas que vão de encontro à intuição, é uma excelente forma de desenvolver o raciocínio estratégico. Isso porque, quando indivíduos ou organizações estão envolvidos em processos de interação estratégica, algumas vezes existem possibilidades que dificilmente seriam percebidas sem o treinamento proporcionado pela teoria dos jogos.

Vamos ilustrar o que estamos querendo dizer com um exemplo bastante simples. Chamaremos esse jogo de *jogo de votação da diretoria*. Imagine que a diretoria de uma empresa hipotética vai se reunir para definir, por meio de votação, os planos da empresa para o ano seguinte. Vamos supor que há apenas três decisões possíveis: investir na construção de uma nova fábrica (que vamos chamar de Investir), ampliar a fábrica já existente (Ampliar), ou aplicar os recursos no sistema financeiro (Aplicar).

Vamos supor também que, para facilitar a decisão, os diretores decidem votar em dois turnos: primeiro votam se constroem a nova fábrica ou se ampliam a já existente. Depois, votam novamente, decidindo entre a escolha vitoriosa na primeira votação e a opção de aplicar os recursos no sistema financeiro. O quadro da Figura 1.2 apresenta as preferências dos diretores, por ordem de prioridade.

O quadro deve ser lido da seguinte forma: o Diretor 1 prefere Investir a Aplicar, e prefere Aplicar a Ampliar. O Diretor 2 prefere Aplicar a Investir, e prefere, por

Diretor 1	Diretor 2	Diretor 3
Investir	Aplicar	Ampliar
Aplicar	Investir	Investir
Ampliar	Ampliar	Aplicar

Figura 1.2 As Preferências dos Diretores

sua vez, Investir a Ampliar. E o Diretor 3 prefere Ampliar a Investir e Investir a Aplicar. Qual seria o resultado da votação? Caso não haja interação estratégica entre os diretores, ou seja, caso cada um deles vote sem levar em consideração as preferências dos demais, o resultado é fácil de ser obtido, basta seguir as preferências do quadro.

Assim, no primeiro turno da votação, ao ter de escolher entre Investir e Ampliar o Diretor 1 escolherá Investir (sua primeira opção), o Diretor 2 escolherá Investir (sua segunda opção, note que sua primeira opção, Aplicar, não está sendo votada agora!), e o Diretor 3 votará em Ampliar, sua primeira opção. Investir derrotará Ampliar por 2×1. No segundo turno é fácil ver que a opção Investir será vitoriosa: receberá os votos do Diretor 1 e do Diretor 3 (Aplicar é sua última opção), enquanto Aplicar receberá apenas o voto do Diretor 2.

Contudo, esse resultado foi obtido partindo da hipótese de que cada diretor vote sem levar em consideração as opiniões dos demais. E se um deles resolvesse agir estrategicamente, ou seja, reconhecendo a interdependência de suas escolhas? Para simplificar, vamos supor que apenas o Diretor 2 resolvesse agir dessa maneira. Ele percebe que, se em vez de votar em Investir, ele votasse em Ampliar, essa seria a opção vitoriosa.

No segundo turno, quando fosse a vez de votar entre Ampliar e Aplicar, a opção Aplicar sairia vitoriosa com o voto do Diretor 2 mais o voto do Diretor 1, que prefere Aplicar a Ampliar. O Diretor 2, ao considerar estrategicamente as preferências dos demais diretores, estaria melhor do que no primeiro caso, pois agora seria vitoriosa a opção Aplicar, que é sua primeira opção.

Para isso, no entanto, o Diretor 2 teve de votar em Ampliar no primeiro turno – a opção que ele *menos desejava*, mas que permitiu que sua primeira opção (Aplicar) acabasse sendo vitoriosa! Assim, com um exemplo simples, pudemos ilustrar o fato de que, em interações estratégicas envolvendo votações, pode ser mais interessante, dependendo da forma como a votação é realizada, votar na sua *pior* escolha, ainda que isso pareça ir de encontro à nossa intuição.

Esse tipo de exercício amplia a percepção das possibilidades de interação estratégica entre agentes que reconhecem sua interdependência mútua e que agem racionalmente, o que é uma das principais vantagens do estudo da teoria dos jo-

gos. Sem esse estudo, as chances de compreender, e estudar, essas possibilidades de interação seriam muito reduzidas. Faça a atividade proposta a seguir, para checar se você percebeu bem a natureza dos problemas que a interação estratégica produz.

Atividade 1.1: Volte ao Jogo da Votação da Diretoria e suponha agora que *todos os diretores* sabem que o diretor 2 pode agir estrategicamente. Supondo-se que todos os diretores são racionais, no sentido de que cada um deseja ver a sua opção preferida vitoriosa, isso alteraria o desenvolvimento do jogo?

Até aqui discutimos o objeto da teoria dos jogos e as vantagens que ela pode nos oferecer. Vejamos agora, muito resumidamente, a que tipos de situação se aplica e como surgiu essa teoria, cuja origem é relativamente recente.

QUANDO ESTAMOS JOGANDO

Vamos começar com uma caracterização um pouco mais precisa do que pode ser considerado um jogo:

Situações que envolvam interações entre agentes racionais que se comportam estrategicamente podem ser analisadas *formalmente* como um jogo.

Assim, um jogo nada mais é do que uma representação formal que permite a análise das situações em que agentes interagem entre si, agindo racionalmente.[2] Essa caracterização merece ser analisada com cuidado, uma vez que ela contém todos os elementos necessários à compreensão do objeto de estudo da teoria dos jogos. Vejamos cada um desses elementos separadamente.

- *Um jogo é um modelo formal.* Isso significa que a teoria dos jogos envolve técnicas de descrição e análise, ou, em outras palavras, que existem regras preestabelecidas para apresentar e estudar um jogo. Portanto, o estudo dessas técnicas é um elemento fundamental para a compreensão da teoria.
- *Interações.* Significam que as ações de cada agente, consideradas individualmente, afetam os demais. Alguns autores também consideram jogos

2 Na verdade, essa definição se adapta apenas a jogos de estratégia e não a outros tipos de jogos, como jogos de pura sorte. Esse ponto ficará claro mais adiante.

as situações em que as ações de um agente não chegam a afetar os demais, como, por exemplo, as decisões de oferta de um vendedor em um mercado pulverizado, no qual cada vendedor representa uma fração tão pequena da oferta total que não pode influenciar, com suas decisões, o preço de mercado. Não será essa, todavia, a abordagem aqui adotada: consideraremos jogos processos que envolvam interações entre os agentes.

- *Agentes*. Um agente é qualquer indivíduo, ou grupo de indivíduos, com capacidade de decisão para afetar os demais: um indivíduo sozinho pode ser um agente, como no caso em que um empregado decide se vai ou não pedir um aumento a seu patrão; ou um grupo de indivíduos pode ser um agente, como no caso de empregados que decidem fazer greve por melhores salários.[3] Em ambos os casos, um agente é denominado, em teoria dos jogos, um *jogador*. Vale enfatizar que jogadores podem ser tanto indivíduos quanto organizações (empresas, governos, sindicatos, partidos políticos etc.).
- *Racionalidade*. Assumir que os agentes são racionais significa supor que os indivíduos empregam os meios mais adequados aos objetivos que almejam, sejam quais forem esses objetivos.[4] A questão da racionalidade é uma das mais complexas no campo das Ciências Sociais, da Psicologia e mesmo da Filosofia. Ainda teremos oportunidade, neste capítulo, de falar um pouco sobre as dificuldades envolvidas com a questão da racionalidade, pois elas são essenciais para uma correta compreensão dos limites de aplicação da teoria dos jogos.
- *Comportamento estratégico*. Por comportamento estratégico entende-se que cada jogador, ao tomar a sua própria decisão, leva em consideração o fato de que os jogadores interagem entre si, e que, portanto, sua decisão terá consequências sobre os demais jogadores, assim como as decisões dos outros jogadores terão consequências sobre ele. Obviamente, isso envolve raciocínios complexos, em que o que um dos jogadores decide depende do que ele acha que os demais farão em resposta às suas ações, o que, por sua vez, irá depender do que os demais jogadores acham que ele fará, e assim por diante.

---

3 É importante observar que um mesmo indivíduo pode não ser um agente em um jogo, mas ser um agente em outro. Assim, as crianças de uma família não são agentes no momento em que seus pais decidem que despesas abater do Imposto de Renda, mas podem ser agentes do jogo familiar que define onde serão as próximas férias.

4 O leitor deve notar que a definição de racionalidade aqui apresentada exclui qualquer avaliação de natureza moral acerca dos objetivos dos jogadores. Assim, a racionalidade de um jogador independe de seus objetivos serem bons ou maus. Teremos oportunidade também de discutir essa questão no próximo capítulo.

Dentre todos os elementos anteriores, vale a pena destacar inicialmente as ideias de interação e comportamento estratégico, uma vez que são os aspectos mais peculiares nos jogos. Um jogo envolve a interdependência mútua das ações de seus jogadores, e isso leva naturalmente os jogadores a considerarem, em suas decisões, os efeitos sobre os demais jogadores, assim como as reações destes. Desse modo, os jogadores tomam **decisões estratégicas**, no sentido preciso de que suas decisões não contemplam apenas seus objetivos e suas possibilidades de escolha, mas também os objetivos e as possibilidades de escolha dos demais jogadores.

Há, com efeito, jogos que não envolvem decisões estratégicas, como, por exemplo, apostar na roleta em um cassino, que seria um jogo de pura sorte, ou jogos que envolvem apenas habilidade, como a disputa de uma final de salto triplo nas Olimpíadas. O leitor deve perceber que não há considerações de natureza estratégica em apostar na roleta, desde que não haja nenhum tipo de manipulação dos resultados. Também não deve haver considerações estratégicas na final de salto triplo, em que cada atleta deverá, a cada tentativa, se esforçar para obter o melhor resultado.[5] Esses jogos de habilidade e pura sorte, que não envolvem decisões estratégicas, não serão objetos de estudo neste livro.

Aqui estamos interessados somente em jogos que, em alguma medida, envolvam decisões estratégicas, pois são situações desse gênero que caracterizam o mundo econômico e empresarial, em que a interdependência entre empresas, governo e consumidores demanda a consideração de sua interdependência mútua. Em outras palavras, estamos interessados apenas em **jogos de estratégia.**

Considerados os principais elementos que compõem um jogo, podemos perceber que várias situações em economia e administração que usualmente não são tratadas como "jogos" podem ser interpretadas dessa forma. Este será nosso próximo assunto.

ALGUMAS SITUAÇÕES QUE PODEM SER ESTUDADAS COMO JOGOS

Considere as situações seguintes, muito comuns na economia e na gestão de empresas:

- Uma montadora de automóveis está decidindo se reduz o preço de seu modelo de carro com menores vendas. Como em geral há poucas monta-

5 É sabido que no salto triplo e em outras modalidades de competição, os atletas evitam se esforçar ao máximo nas primeiras etapas, reservando forças para surpreender seus concorrentes nas etapas finais. Sem dúvida, essa é uma decisão estratégica. Daí restringirmos nosso exemplo à final de uma competição de salto triplo, quando cada atleta procura dar o melhor de si, independentemente dos demais.

doras de automóveis cada qual com participação significativa no mercado, isso significa que sua decisão terá consequências sobre as vendas das empresas que produzem modelos concorrentes do seu. Isto deverá ser levado em consideração, pois a decisão de reduzir o preço do modelo poderá levar as empresas competidoras a também reduzirem seus preços. Por outro lado, as outras empresas devem considerar, ao definirem os preços de seus modelos, a possibilidade de a empresa em questão reduzir o preço de seu modelo cujas vendas não vão bem.

- Um país-membro da Opep (a associação mundial dos produtores de petróleo) avalia se vale a pena restringir sua produção de petróleo para sustentar o preço do produto. Os líderes da Opep, por sua vez, consideram a possibilidade de os países-membros desrespeitarem suas cotas no momento de reduzir a produção.
- Uma empresa química está decidindo se constrói uma nova fábrica em um mercado no qual ainda não possui nenhuma. Para isso irá considerar a capacidade instalada das indústrias já estabelecidas no mercado e a possibilidade de que elas reajam, inundando aquele mercado com seus produtos, e tornando assim a margem de lucro para a nova fábrica inaceitável. As empresas instaladas, por sua vez, no momento de decidirem o quanto deverão investir em capacidade produtiva, irão considerar a possibilidade de aquela empresa entrar no mercado.
- Uma empresa considera a possibilidade da aquisição hostil[6] de uma outra empresa. A empresa que está sendo ameaçada, por sua vez, considera a possibilidade e a necessidade da adoção de medidas defensivas para tentar impedir a aquisição hostil.

Se observarmos os exemplos listados acima, veremos que todos eles envolvem os elementos que caracterizam um jogo. No exemplo da montadora de automóveis que está decidindo se reduz ou não o preço do modelo com vendas insatisfatórias, sem dúvida alguma há uma interação entre as decisões da montadora e as de suas concorrentes.

Além disso, a montadora em questão tentará se comportar de forma racional, empregando os meios de que dispõe para tomar sua decisão da melhor forma possível, dado seu objetivo, que é maximizar os lucros. Finalmente, a montadora tentará antecipar quais serão as possíveis reações de suas concorrentes no momento de tomar sua decisão.

---

6 Uma tentativa de aquisição hostil se dá quando uma oferta de aquisição das ações da empresa com direito a voto é feita diretamente aos acionistas da empresa que se deseja adquirir, *contra* a vontade dos executivos da empresa em questão.

BOX 1.1

A Guerra de Preços no Mercado Europeu de Automóveis

Em setembro de 2004, a Ford Motors do Reino Unido passou a oferecer um desconto de 25% em seu modelo Ford C-Max. Segundo matéria publicada no *Financial Times*, em 24 de setembro de 2004, esse desconto passou a ser oferecido porque a empresa avaliou mal a demanda da versão diesel do modelo no mercado britânico, cujos modelos têm a especificidade de serem produzidos com a direção no lado direito.

O desconto oferecido pela Ford Motors acirrou a guerra de preços dos automóveis no mercado europeu. A Fiat, por exemplo, passou a buscar a redução de seus custos para manter sua parcela no mercado.

No segundo caso, a interação se dá entre a Opep e os próprios países-membros. Se a organização decidir reduzir excessivamente a produção total dos países-membros, visando a obter um preço muito elevado para o petróleo, é provável que as cotas de produção assim fixadas sejam desrespeitadas por vários países produtores, que teriam a ganhar produzindo mais com o preço elevado.

Por outro lado, cada país-membro tem de considerar os custos e os benefícios antes de decidir se obedecerá às cotas definidas pela Opep. Se decidir obedecer, corre o risco de sacrificar sua receita da venda de petróleo, ao passo que os países que eventualmente desrespeitarem a cota podem se beneficiar do preço mais alto, ao mesmo tempo em que vendem mais. Contudo, se todos os países-membros raciocinarem da mesma forma, ninguém cumpre as cotas e a tentativa de aumentar o preço fracassa. Obviamente, um problema de interação estratégica.

BOX 1.2

A Opep e o Mercado Internacional do Petróleo

A Opep foi fundada em 1960, pelo Irã, Iraque, Kuwait, Arábia Saudita e Venezuela. Até o início dos anos 1970 a Opep era uma organização com pouca expressão, mas em 5 de outubro de 1973 começava a guerra do Yom Kippur, com Israel sendo atacado pelo Egito e pela Síria. Naquele momento, os Estados Unidos e outros países desenvolvidos do Ocidente demonstraram apoio à causa israelense, o que levou vários países árabes a decretarem um embargo de petróleo aos países que apoiavam Israel. A oferta de petróleo iria sofrer restrições ainda ao longo dos anos 1970. A revolução no Irã em 1979 e a guerra Irã-Iraque em 1980 foram fatores adicionais de restrição de oferta no início dos anos 1980.

Em 1972, o preço internacional do petróleo oscilava em torno de três dólares o barril. Em consequência da crise de 1973, que se estenderia até 1974, o preço do barril aumentaria, no final de 1974, para 12 dólares o barril. Em 1981, o preço atingiria o recorde de 35 dólares o barril.

Os efeitos do aumento de preços foram todos negativos para a capacidade da Opep de controlar o preço do petróleo. Em primeiro lugar, provocou uma busca por tecnologias mais eficientes em energia, o que fez com que a demanda se reduzisse. Essa redução na demanda significou um novo patamar de consumo, significativamente inferior ao anterior, que provocava desperdício de energia. Em segundo lugar, os preços elevados estimularam a produção de petróleo em países que não eram membros da Opep, o que fez com que a oferta se elevasse, com a produção de países que não obedeciam às determinações da Opep. Isso também contribuiu para reduzir os preços.

Houve um esforço da Opep de sustentar preços elevados para o petróleo, por meio da aplicação, entre 1982 e 1985, de cotas de produção restritivas para os países que eram membros do cartel. Contudo, essas cotas foram sistematicamente desrespeitadas pela maioria dos países que faziam parte do cartel. Com efeito, apenas a Arábia Saudita tentava sustentar os preços, reduzindo sua produção para acomodar a produção acima das cotas dos demais países. A partir de agosto de 1985, quando a Arábia Saudita desistiu de sustentar sozinha o cartel, os preços despencaram, atingindo dez dólares o barril já em 1986.

No terceiro caso, da indústria química que decide se vai ou não construir uma nova fábrica em um mercado regional, os elementos de interação estratégica são evidentes. Se a empresa não considerar a possibilidade de reação das empresas já estabelecidas, corre o risco de que estas últimas aumentem significativamente sua oferta, provocando uma queda de preços tão acentuada que a nova fábrica se torne inviável economicamente (em função dos investimentos que terá de amortizar).

Por outro lado, as empresas estabelecidas têm de avaliar os ganhos esperados do emprego de capacidade ociosa como elemento de prevenção à entrada: se a ameaça de uma nova fábrica no mercado regional não for significativa, é provável que os custos de investir em capacidade ociosa não sejam compensadores.

BOX 1.3

A Du Pont e o Pigmento Dióxido de Titânio

Em seu livro *Introduction to Industrial Organization* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 2000), na página 261, Luís M. B. Cabral relata a estratégia da Du Pont para prevenir a entrada de concorrentes no mercado de dióxido de titânio. O dióxido de titânio é um pigmento branco empregado na fabricação de tinta e papel, entre outros.

Ele é fabricado a partir da ilmenita ou do rutilo. Enquanto ao longo dos anos 1960 a Du Pont utilizava ilmenita, seus concorrentes produziam o dióxido de titânio a partir do rutilo. No início dos anos 1970, a Du Pont possuía vantagens competitivas em pelo menos três aspectos, em relação a seus rivais: empregava um insumo mais barato do que o dos concorrentes; seu processo produtivo estava melhor ajustado às exigências da regulação de meio ambiente; e estava em melhores condições financeiras do que seus concorrentes.

A Du Pont decidiu então usar essas vantagens para limitar a entrada de competidores no mercado, adotando a estratégia de expandir sua capacidade de oferta para atender a todo o crescimento da demanda, de forma a não deixar espaço para os competidores. Com isso, das cinco competidoras da Du Pont no mercado norte-americano, três acabaram sendo adquiridas por ela, uma encerrou suas atividades nos Estados Unidos e a última simplesmente fechou suas portas.

No último caso, em que uma empresa considera a possibilidade da aquisição hostil de outra empresa, as considerações de natureza estratégica são fundamentais: os executivos da empresa sob ameaça de aquisição hostil devem avaliar se a outra empresa está realmente disposta a bancar a aquisição, fazendo por exemplo, ofertas generosas aos acionistas da empresa ameaçada. A empresa que avalia a conveniência de empreender a aquisição hostil deverá avaliar, por outro lado, os meios de que a diretoria da outra empresa dispõe para tentar impedir a aquisição hostil. Serão essas avaliações estratégicas de ambas as empresas que definirão, em grande medida, não apenas se a aquisição hostil será tentada, mas também seu sucesso ou seu fracasso.

BOX 1.4

A Leica se Defende de uma Tentativa de Aquisição Hostil

Em 30 de junho de 2005, a empresa suíça de tecnologia Leica Geosystems anunciou maiores distribuições de dividendos e uma recompra de ações no valor de 100 milhões de francos suíços. Foi a resposta da direção da empresa à visita de Ola Rollen, o executivo-chefe da empresa sueca Hexagon, a Zurique. Durante a visita, Ola Rollen se reuniu com grandes acionistas da Leica, na tentativa de convencê-los a aceitar a proposta de aquisição hostil pela Hexagon, que oferecia 440 francos suíços aos acionistas da Leica, para adquirir o controle acionário da empresa.

Às vezes a situação se complica, como quando os executivos da empresa que sofre a ameaça de aquisição hostil fazem acordos com outra empresa, especialmente quando avaliam que a proposta da empresa que tenta realizar a aquisição hostil é irrecusável. Assim, com o apoio dos executivos da Leica, a empresa norte-americana Danaher fez, em 26 de julho de 2005, uma proposta alternativa de

aquisição da Leica, pagando 500 francos suíços por ação. Todavia, em 15 de agosto do mesmo ano, a Hexagon elevou sua oferta aos acionistas da Leica, para 573 francos suíços por ação. A Hexagon acabaria por vencer a batalha.

Por serem essas situações de interação estratégica, pode-se estudá-las com o auxílio da teoria dos jogos. Como teremos a oportunidade de ver ao longo deste livro, a vantagem de analisar cada uma dessas situações como um jogo é que os fatores determinantes das decisões dos agentes podem ser mais bem compreendidos do que seriam se apenas nos limitássemos a estudar caso a caso e, assim, a lógica por trás de cada decisão pode ser entendida e comparada com casos semelhantes. Estaremos, dessa forma, melhor capacitados para entender o que existe de geral e de específico em cada caso de interação estratégica no mundo empresarial e na economia como um todo.

Vimos que situações de interação estratégica entre indivíduos e organizações podem ser tratadas como um jogo e assim analisadas. Falta analisarmos, no que diz respeito à modelagem de um jogo, a questão dos objetivos do jogador, e de como ele busca esses objetivos. Essa é uma questão muito importante e que tem dado origem a um grande número de confusões, pois se trata de definir qual será o comportamento dos jogadores, um elemento essencial para determinar o resultado de um jogo. Para isso precisamos saber algo acerca dos *objetivos* desses jogadores.

Com efeito, podemos ter resultados muito distintos ao modelar um processo de interação estratégica dependendo dos objetivos que tenhamos atribuído aos jogadores. Apenas para ilustrar, considere o caso dos lutadores de sumô, apresentado pelo economista Steven D. Levitt e pelo jornalista Stephen J. Dubner em seu livro *Freakonomics* (Rio de Janeiro, Campus, 2005). Esse caso exemplifica muito bem como hipóteses equivocadas acerca dos objetivos dos jogadores podem resultar em surpresas.

Como explicam Levitt e Dubner, o *ranking* dos lutadores de sumô no Japão é definido a partir de seis torneios anuais, sendo que em cada torneio o lutador tem de lutar 15 vezes. O número ímpar faz com que os lutadores se empenhem com afinco para que o número de vitórias supere o de derrotas.

O *ranking* é muito competitivo: se o lutador não tiver mais vitórias do que derrotas, pode até ser excluído da elite dos lutadores de sumô. Pertencer à elite, por sua vez, é muito importante: significa fortuna e glória. Como são 15 lutas, obter um placar de 8×7 é essencial. Imagine então que dois lutadores com placar 7×7 se enfrentem. É razoável supor que ambos estarão dando o máximo de si para garantir a 8ª vitória, até porque essa será a última luta de ambos no tor-

neio. Podemos então afirmar, com alguma segurança, que o objetivo de cada um será a vitória.

Mas e se acontecer de um lutador com um placar de 8 × 6 enfrentar outro com um placar de 7 × 7? O que podemos esperar como objetivo desses dois lutadores de sumô? O lutador com o placar de 7 × 7 se encontra em uma situação desesperadora, pois essa é a sua última chance no torneio de conseguir terminar com um saldo favorável de vitórias e é razoável supor que ele lutará com todas as suas forças, como no caso anterior. Mas e o lutador que já garantiu sua oitava vitória, será que lutará com o mesmo empenho que o lutador que ainda não garantiu um placar favorável?

Levitt e Dubner sugerem que não. Analisando os dados das lutas entre lutadores com 7 × 7 no placar contra lutadores com 8 × 6, eles descobriram um percentual de vitórias dos lutadores com 7 × 7 muito maior do que aquele que poderia ser previsto, dado seu desempenho até ali (os lutadores com 7 × 7 venceram 79,6% das vezes, quando, dada a sua performance, seria razoável que eles vencessem 48,7%). Assim, se, ao analisarmos uma luta entre um lutador com 8 × 6 e um lutador com 7 × 7, supuséssemos que ambos os lutadores teriam como objetivo a vitória, provavelmente cometeríamos um equívoco.

Algumas razões podem ser apontadas para isto. Em primeiro lugar, o fato de que, para os lutadores com 8 × 6, ganhar uma luta e aumentar o placar para 9 x 6 não resulta em grande diferença no *ranking*, ao passo que para os lutadores com 7 × 7 esse esforço terá uma recompensa elevada, que é garantir uma posição no mínimo satisfatória no *ranking*.

Além disso, há evidências apresentadas por Levitt e Dubner de que há uma espécie de troca de favores entre os lutadores: o lutador que já conseguiu 8 × 6 pode facilitar para um lutador com 7 × 7, uma vez que ele pode vir a encontrar esse mesmo lutador em outro torneio, mas agora com os papéis trocados, e receber assim a retribuição pelo seu "favor".

Seja como for, o sentido da análise de Levitt e Dubner para nós é que é preciso ter certo cuidado na hora de avaliar quais são os objetivos dos jogadores. Uma avaliação incorreta dos objetivos pode levar a um equívoco grave no momento de analisar os possíveis desdobramentos de uma situação de interação estratégica. No caso dos lutadores de sumô, mais do que vencer uma luta, o objetivo parece ser manter uma boa posição no ranking.

O que importa é que tenhamos percebido adequadamente os objetivos dos jogadores e não quais são esses objetivos em si. Ou seja, em teoria dos jogos *não há qualquer restrição quanto aos objetivos que os jogadores almejam*: é plenamente possível modelar em um jogo tanto uma interação entre lutadores de sumô que agem de forma estritamente competitiva, quanto uma interação en-

tre jogadores que "acomodam" o resultado da melhor maneira possível para todos.

Até mesmo uma interação entre lutadores de sumô que "entregassem" sempre a luta para o adversário poderia ser modelada como um jogo sem maiores problemas. A teoria dos jogos não fez nenhuma restrição aos objetivos dos jogadores. Qualquer objetivo, em princípio, é passível de modelagem e análise.

Todavia, é neste ponto que, algumas vezes, surgem confusões. Uma confusão muito frequente é aquela que se origina na caracterização do jogador como um agente "racional". O próprio leitor pode estar se perguntando se poderia ser chamado de racional um lutador de sumô que "entregasse" a luta para seu adversário. Um competidor que agisse assim provavelmente não seria visto como racional, já que não estaria agindo de acordo com as nossas expectativas. Pareceria que apenas o lutador que disputasse o combate com todo o seu vigor, não se importando com o adversário e buscando apenas o máximo possível de pontos, seria um competidor racional.

Em outras palavras, pareceria que apenas um lutador *egoísta*, ou seja, que competisse tendo em vista apenas o próprio sucesso, seria racional. Mas então, egoísmo é sinônimo de racionalidade? Todo indivíduo egoísta age racionalmente? E todo indivíduo racional se comporta de forma egoísta? O leitor já deve estar suspeitando, e iremos procurar mostrar isso mais adiante, que *racionalidade não é sinônimo de motivação egoísta*. Infelizmente, essa é uma ideia *equivocada* que usualmente se faz da racionalidade: de que o fato de os jogadores serem racionais significa que cada jogador pensa apenas nele mesmo e não considera o bem-estar dos demais.

Ocorre que isso nada tem a ver com racionalidade. Na verdade, a racionalidade não está relacionada aos objetivos dos jogadores, sejam eles egoístas ou altruístas. Um indivíduo altruísta pode ser tão racional (ou irracional) quanto um indivíduo egoísta – e vice-versa – *dados os seus objetivos*. Isso porque a racionalidade aqui será entendida como a *coerência entre os meios e os fins dos agentes*.

Por exemplo: um indivíduo que coletasse todas as informações relevantes sobre as decisões dos demais investidores, o comportamento das empresas e a situação do mercado de capitais, e a partir daí aplicasse seu dinheiro em ações de empresas com melhores perspectivas de ganho, estaria agindo tão racionalmente quanto um indivíduo que estivesse levantando informações acerca das formas mais eficientes de transferir seus fundos para a população de rua.

Não faz sentido, portanto, afirmar que o primeiro indivíduo estaria sendo "racional" e o segundo "irracional", uma vez que ambos estariam fazendo o melhor possível para alcançar seus objetivos. Racionalidade, portanto, tem a ver com os *meios* que os indivíduos empregam para alcançar seus fins e *não com os*

fins em si mesmos. Isso porque a análise dos fins, ou objetivos dos jogadores, é um *julgamento moral*, que obviamente pressupõe um padrão ético. Mas a teoria dos jogos não pode oferecer nenhum padrão ético.

A teoria dos jogos não pode oferecer padrões éticos porque, para julgar aplicações na bolsa, ou doações para desabrigados, é necessário um critério do que é "certo" e "errado" e, assim, uma perspectiva *crítica* dos jogadores e do processo de interação em que eles estão envolvidos. Acontece que a teoria dos jogos *considera os jogadores e sua interação estratégica como sendo dados* e, portanto, não tem capacidade para exercer crítica nem sobre os jogadores, nem sobre o jogo.

Isso não significa que, em vários modelos de jogos, não se utilize a suposição de que os objetivos dos jogadores sejam somente obter o máximo para si mesmos, sem se importarem com o bem-estar dos outros. Com efeito, veremos vários modelos em que essa hipótese é efetivamente empregada. Essa opção, contudo, não deriva de uma suposição quanto à "racionalidade" dos jogadores, mas das circunstâncias em que os jogadores interagem.

Mais especificamente, a hipótese de jogadores que buscam o máximo de benefício, sem se importarem com o prejuízo que isso possa causar aos outros (sendo que, em alguns casos, o máximo de benefício para si significa justamente o máximo de prejuízo para os outros), é em geral adotada em *modelos de competição* econômica e política, em que há fortes razões para acreditar que esse é realmente o objetivo de cada jogador.

Portanto, a definição do objetivo do jogador como egoísta, ou altruísta, depende da natureza do processo de interação em que os jogadores estão envolvidos, assim como dos objetivos que o analista acredita que esses jogadores buscam. Nada tem a ver com o fato de eles serem, ou não, "racionais".

Depois de toda essa discussão, o leitor deve estar se perguntando: afinal, qual é o conceito de racionalidade que se emprega em teoria dos jogos? Eis uma definição do que se entende por "racionalidade" em teoria dos jogos:

Um *agente racional* é aquele que:

1. Aplica a lógica a premissas dadas para chegar às suas conclusões.
2. Considera apenas premissas justificadas a partir de argumentos racionais.
3. Usa evidências empíricas com imparcialidade ao julgar afirmações sobre fatos concretos.

Veja: Herbert Gintis, *Game Theory Evolving: a problem-centered introduction to modeling strategic interaction*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 2000, p. 243.

Essa definição contém o mínimo que se pode esperar de um jogador racional: que ele raciocine logicamente, ou seja, extraindo conclusões a partir de premissas de uma forma coerente; que escolha as próprias premissas nas quais apoia o seu raciocínio lógico com base no emprego da razão; e que considere as evidências de forma neutra, sem distorcer os fatos ou omitir evidências.

Se os jogadores se comportarem dessa maneira, *a teoria da escolha racional* nos informa de que maneira eles farão suas escolhas, entre os diversos objetivos que podem ter em mente. Essa teoria é a base mais usualmente empregada em teoria dos jogos para especificar o que se pode esperar dos jogadores e será abordada em seguida.

A TEORIA DA ESCOLHA RACIONAL

A teoria dos jogos procura entender como os jogadores (sejam eles indivíduos, empresas, organizações, países etc.) tomam suas decisões em situações de interação estratégica. Em outras palavras, a teoria dos jogos visa a explicar como esses jogadores *fazem as suas escolhas* em situações de interação estratégica.

Para estudarmos como os jogadores tomam as suas decisões, temos de considerar as **preferências** desses jogadores, pois essas preferências é que irão nortear as escolhas dos jogadores. Utilizaremos aqui a **teoria da escolha racional**, ou seja, a teoria que parte das preferências dos jogadores para entender suas escolhas, assumindo como um princípio básico a ideia de que os jogadores são *racionais*.

Consequentemente, nossa discussão da teoria da escolha racional tem de se iniciar por uma caracterização das *preferências* dos jogadores e do que entendemos exatamente por *racionalidade*. O primeiro passo para formularmos essa teoria é encontrar uma maneira de expressar as preferências que norteiam as escolhas dos jogadores.

Para expressar essas preferências, precisamos do conceito de **relação**.[7] Assim, suponha um conjunto que chamaremos de *Capitais*:

$$Capitais = \{\text{Santiago, Montevidéu, Buenos Aires}\}$$

E suponha um outro conjunto que chamaremos de *Países do Cone Sul*:

$$Países\ do\ Cone\ Sul = \{\text{Argentina, Chile, Uruguai}\}$$

7 Na verdade, estaremos tratando especificamente de **relações binárias**, isto é, entre dois elementos.

A ideia de relação está associada à presença de um vínculo entre os elementos analisados, ou de uma relação de pertinência. Assim, poderíamos estabelecer a relação R_1 entre os elementos do conjunto *Capitais* e os elementos do conjunto *Países do Cone Sul*:

$$R_1 = \{(\text{Buenos Aires, Argentina}), (\text{Santiago, Chile}), (\text{Montevidéu, Uruguai})\}$$

Se chamarmos o primeiro elemento da relação de x e o segundo elemento de y, o conjunto R_1 expressa a relação "x é a capital de y".

Como um outro exemplo, suponha um conjunto $S = \{2, 3\}$. Poderíamos definir a relação xR_2y = "x maior ou igual a y" e que poderia ser representada por $x \geq y$, sendo tanto x quanto y elementos do conjunto S, com o que obteríamos:

$$R_2 = \{(2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$$

Neste caso, em que temos uma relação entre os membros de um mesmo conjunto (o conjunto S), diz-se que a relação xRy define uma *relação sobre S*.

Uma **relação de preferência** é, então, uma relação particular, representada por $\succeq$ (lê-se "ao menos tão bom quanto").

Vamos ilustrar esse tipo de relação com um exemplo. Suponha um conjunto qualquer L das opções de lazer de fim de semana para um indivíduo. Se, dados dois elementos quaisquer $a, b \in L$ (por exemplo, praia e futebol com os amigos), for verdade que $a \succeq b$, isso significa que para esse indivíduo a opção a (praia) é pelo menos tão boa quanto a opção b (futebol com os amigos).

O leitor já deve ter percebido que a relação de preferência $\succeq$ não nos permite dizer com precisão se a supera b nas preferências de um agente, ou se há indiferença entre as duas opções, sendo uma opção tão boa quanto a outra. Na verdade, podemos derivar duas relações binárias a partir de $\succeq$, a *relação de preferência estrita* $\succ$ e a *relação de indiferença* $\sim$.

Define-se a relação de preferência estrita como sendo:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \textit{ mas não } y \succeq x$$

O símbolo ($\Leftrightarrow$) acima é lido como "se, e somente se". Utilizamos esse símbolo lógico quando duas proposições ocorrerem sempre juntas. Assim, $a \Leftrightarrow b$ significa que a é verdade somente se b for verdade, e que b é verdade somente se a for verdade, ao mesmo tempo.

Portanto, o que a expressão anterior nos informa é que x é "estritamente preferível" ($\succ$) a y se, e somente se, x for tão bom quanto y, mas y não for tão

bom quanto x. Por conseguinte, obtemos a relação de preferência estrita se excluirmos da relação de preferência a possibilidade de que um elemento seja tão bom quanto o outro.

Define-se a relação de indiferença como sendo:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ e } y \succsim x$$

O que a expressão acima nos informa é que x é "indiferente" ($\sim$) a y se, e somente se, x for tão bom quanto y e y for tão bom quanto x. Como a relação de preferência estrita $\succ$ exclui justamente a possibilidade de que x seja tão bom quanto y e y seja tão bom quanto x, segue-se então que o que há entre x e y é indiferença.

O leitor não deve confundir a relação binária $\succsim$ ("ao menos tão bom quanto") com a relação binária $\geq$ ("maior ou igual"). Em primeiro lugar, porque as duas relações dizem respeito a comparações de natureza distinta. A relação $\geq$ diz respeito à comparação de uma mesma dimensão entre elementos (peso, altura, somas monetárias etc.). Não faz sentido algum, portanto dizer que uma temperatura de 27°C é maior ou igual a 3 kg. Já a relação $\succsim$, ao representar preferências, pode obviamente admitir que sejam comparados elementos de dimensões totalmente distintas. Pode ser que para alguém 2,5 horas de cinema sejam ao menos tão boas quanto uma pizza de calabresa.

Em segundo lugar, há o fato de que a relação $\geq$ obedece à condição:

$$\text{Se } a \geq b \text{ e } b \geq a \text{ então } a = b$$

Já a relação $\succsim$ obedece à condição:

$$\text{Se } a \succsim b \text{ e } b \succsim a \text{ então } a \sim b$$

A relação de indiferença não exige que a e b sejam iguais, mas apenas que haja indiferença na escolha entre eles: pode acontecer uma situação em que alguém considere igualmente bons uma pizza *margherita* e uma pizza quatro queijos.

Vimos que os jogadores são supostamente racionais, ao menos para grande parte dos modelos de teoria dos jogos. Agora estamos em condições de especificar com maior precisão o que significa afirmar que os jogadores são racionais. Afirmar que os jogadores são racionais em teoria dos jogos significa afirmar que *as suas preferências são racionais.*

Há um volume significativo de trabalhos discutindo as propriedades que caracterizariam preferências racionais. Optamos aqui pela formulação de Andreu Mas-Collel, Michael D. Whinston e Jerry R. Green, no livro *Microeconomic Theory* (Nova York, Oxford University Press, 1995), por ser uma das mais concisas que conhecemos.

Desta forma, afirmar que *uma relação de preferência é racional* significa que a relação binária de preferência $\succeq$ apresenta as seguintes propriedades:

a) A relação de preferência $\succeq$ sobre um conjunto de escolhas possíveis A é **completa**: para qualquer $x, y \in A$, temos que $x \succeq y$, $y \succeq x$, ou ambos. Essa propriedade implica que, entre duas escolhas factíveis, sempre é possível dizer se a primeira é ao menos tão boa quanto a segunda, se a segunda é ao menos tão boa quanto a primeira, ou se as duas coisas ocorrem ao mesmo tempo, o que significa dizer que há indiferença entre as duas. Em outros termos, os agentes são capazes de definir suas preferências em relação a qualquer escolha possível.

b) A relação de preferência $\succeq$ sobre um conjunto de escolhas possíveis A é **transitiva**: para quaisquer $x, y, z \in A$, temos que se $x \succeq y$ e $y \succeq z$, então $x \succeq z$. Essa propriedade significa que há consistência nas escolhas: caso praia seja tão bom quanto futebol e futebol seja tão bom quanto cinema, praia tem de ser tão bom quanto ir ao cinema.

A hipótese de que a relação de preferência $\succeq$ é completa nos permite afirmar que os jogadores são sempre capazes de expressar uma preferência estrita entre quaisquer duas possibilidades (uma é efetivamente melhor para o jogador do que a outra) ou, ao menos, são indiferentes entre as duas possibilidades. Em outras palavras, nenhum dos jogadores ficaria paralisado no momento de fazer sua escolha por não saber como avaliar as possibilidades.

A hipótese de que a relação de preferência $\succeq$ é transitiva impede que o jogador esteja sujeito a um comportamento irracional, o qual permitira que esse jogador fosse explorado por outro jogador. Para entender como isso se daria, imagine um jogador que prefira A a B, B a C, mas prefira C a A, ou seja, que suas preferências não fossem transitivas. Vamos chamá-lo de jogador 1. Imagine agora algum outro jogador – vamos chamá-lo de jogador 2 – que saiba que as preferências do jogador 1 não são transitivas e decida explorá-lo: o que ele faria?

Você talvez já tenha adivinhado. Suponha que o jogador 1 possua C, que ele menos prefere. O jogador 2 poderia oferecer a troca de C por B, depois propor a 1 trocar B por A. Como o jogador 1 prefere C a A, ele aceitará trocar A, mais

uma pequena soma em dinheiro, por C, com o jogador 2. E então o jogador 1 terminaria com C (com que começou o jogo), *menos uma pequena quantidade de dinheiro*.

Se o jogador 2 for suficientemente paciente para repetir o mesmo ciclo tantas vezes quantas forem necessárias, o jogador 1 acabará sem nenhum dinheiro. Daí o apelido que este tipo de situação ganhou na literatura: "bomba de dinheiro" (em inglês, *money pump*), por analogia a uma bomba d'água.

Preferências completas e transitivas são chamadas de **preferências ordinais**, uma vez que elas ordenam as preferências de um jogador com relação a determinados resultados. É por intermédio desse tipo de preferências que iremos caracterizar, daqui por diante, o fato de que os jogadores são racionais.

Definida dessa maneira nossa expectativa quanto à racionalidade dos jogadores, pode parecer que estamos exigindo muito pouco deles. Em outras palavras, pode parecer que essas hipóteses quanto à relação de preferência sejam tão simples e óbvias que isso não cause maiores problemas à aplicação da teoria dos jogos. Na verdade não é bem assim, como veremos adiante.

Em primeiro lugar, veremos que, mesmo com essas hipóteses acerca da relação de preferências aparentemente simples podemos chegar a resultados paradoxais. Em segundo lugar veremos que, apesar da nossa caracterização de racionalidade parecer trivial, em muitas situações da vida concreta as condições necessárias para o exercício da racionalidade, tal como a definimos, não estão presentes.

JOGANDO COM AS PREFERÊNCIAS: O PARADOXO DE CONDORCET

Vimos, no jogo de votação da diretoria, que quando analisamos votações, algumas vezes podemos nos surpreender com o resultado. O paradoxo de Condorcet (também conhecido como paradoxo da votação pelos economistas) nos adverte que preferências racionais do tipo que estamos estudando também podem levar a resultados surpreendentes.

O paradoxo de Condorcet[8] mostra que o fato de as preferências dos indivíduos, quando tomados isoladamente, serem transitivas, *não implica* que as preferências dos indivíduos, *quando tomados em grupo*, também serão transitivas.

---

8 Esse paradoxo deve seu nome a Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, marquês de Condorcet (1743-1794), filósofo, matemático e um dos precursores dos cientistas políticos modernos. Liberal, defendia a educação pública gratuita e igual para todos, igualdade de direitos para homens e mulheres, assim como para indivíduos de todas as raças. Como matemático, realizou contribuições importantes em cálculo integral. Preso pela Revolução Francesa em 1794, foi encontrado morto em sua cela no dia 28 de março do mesmo ano, em Bourg-la-Reine.

Para ilustrar o que estamos querendo dizer, considere um parlamento imaginário, em que os deputados se dividem em três partidos, sendo que os deputados de um mesmo partido possuem todos o mesmo ordenamento de preferências, e os três partidos possuem um número idêntico de deputados. Vamos chamar o primeiro partido de Partido Conservador, o segundo partido de Partido Moderado e o terceiro partido de Partido Radical.

Esses deputados devem votar em um orçamento nacional, no qual terão de decidir se desejam:

- Aumentar o número de programas sociais, que chamaremos de proposta G;
- Manter o número de programas sociais, que chamaremos de proposta M;
- Diminuir o número de programas sociais, que chamaremos de proposta D.

A Figura 1.3 expressa as preferências dos três partidos:

Partido Conservador	$D \succ G \succ M$
Partido Moderado	$M \succ D \succ G$
Partido Radical	$G \succ M \succ D$

Figura 1.3 As Preferências dos Partidos no Paradoxo de Condorcet

A proposta que o Partido Conservador prefere é reduzir os programas sociais. Em segundo lugar, vem aumentar o número desses programas, pois dessa forma o Partido Conservador acredita que o governo seria obrigado a aumentar a carga fiscal, o que repercutiria negativamente na população e levaria, na votação do orçamento nacional do ano seguinte, efetivamente a uma redução nesses programas.

O pior resultado para o Partido Conservador é ficar tudo como está, pois ele não conseguirá nem implementar a redução nos gastos sociais nesse ano, nem terá a perspectiva de fazê-lo no ano seguinte.

O Partido Moderado, que faz jus a seu nome, prefere manter os programas sociais como estão. Se não for possível mantê-los como estão, o Partido Moderado prefere uma redução nos programas a um aumento, que seria a pior opção para o partido, pois os moderados não gostam de correr riscos.

Por último, temos o Partido Radical, que defende o aumento dos programas sociais. Se não for possível aumentá-los, pelo menos tentará mantê-los como estão. A pior opção para o Partido Radical é uma diminuição no número de programas sociais.

Podemos falar que existe uma *preferência do Parlamento* quanto a essas propostas? Vamos supor que cada proposta é confrontada com outra aos pares, na votação dos parlamentares:

a) Primeira rodada: *G versus M*
A partir da Figura 1.3 podemos ver que no confronto entre *G* e *M*, o Partido Radical votaria em *G* (sua primeira preferência), o Partido Moderado votaria em *M* (sua primeira preferência) e o Partido Conservador votaria em *G* (sua segunda preferência, pois *M* é a sua última preferência). Com isso, *G* venceria com dois terços dos votos do Parlamento.

b) Segunda rodada: *M versus D*
Na Figura 1.3 podemos ver que no confronto entre *M* e *D*, o Partido Radical votaria em *M* (sua segunda preferência), o Partido Moderado votaria em *M* (sua primeira preferência) e o Partido Conservador votaria em *D* (sua primeira preferência). Com isso, *M* venceria com dois terços dos votos do Parlamento.

Até aqui, como *G* venceu *M* e *M* venceu *D* teríamos a seguinte ordem de preferências no Parlamento: $G \succ M \succ D$. Mas vamos supor que houvesse uma votação entre *G* e *D*. O que ocorreria?

c) Terceira rodada: *G versus D*
A Figura 1.3 mostra que no confronto entre *G* e *D*, o Partido Radical votaria em *G* (sua primeira preferência), o Partido Moderado votaria em *D* (sua segunda preferência) e o Partido Conservador votaria em *D* (sua primeira preferência). Com isso, *D* venceria com dois terços dos votos do Parlamento.

Assim, teríamos a seguinte ordem de preferências expressando as preferências do parlamento: $G \succ M \succ D \succ G$ – um ordenamento de preferências **intransitivo**, que se fecha em um ciclo. *Não temos, portanto, como afirmar que qualquer das propostas expressa a preferência do Parlamento*: tudo depende da ordem das votações.

Portanto, o fato de que os deputados individualmente tenham preferências transitivas, que obedecem às condições da escolha racional, que vimos anteriormente, não implica que o mesmo acontece quando tomamos os deputados coletivamente.

AFINAL, A VIDA É UM JOGO?

Das propriedades das preferências racionais dos jogadores que acabamos de ver, pode parecer que poucas seriam as situações em que a teoria dos jogos não poderia ser aplicada. Afinal, são inúmeras as situações de interação em que indivíduos e organizações agem estrategicamente e se comportam racionalmente, da forma como definimos.

Na verdade, contudo, não é bem assim. Antes de discutirmos os limites da hipótese de racionalidade dos jogadores – o que é muito importante para entender os próprios limites da aplicação da teoria dos jogos –, é preciso discutir as vantagens dessa hipótese, que são significativas, e alguns problemas atribuídos *indevidamente* a ela.

A vantagem do modelo de escolha racional é que ele permite extrair uma série de conclusões interessantes a partir de um conjunto muito pequeno de hipóteses (de que os jogadores são capazes de estabelecer suas preferências de forma completa e transitiva). Isso *não* significa afirmar que os jogadores não podem cometer erros. Essa possibilidade, em um contexto de incerteza (quando o resultado das ações não pode ser antecipado com absoluta certeza), pode ser perfeitamente acomodada à hipótese de que os jogadores são racionais, como veremos neste livro.[9]

Em segundo lugar, jogadores racionais não reagem de forma idêntica diante das mesmas situações. Não só eles podem ter preferências diferentes quanto aos resultados de suas decisões (lembre-se de que racionalidade nada tem a ver com os objetivos dos jogadores), como podem ter diferentes preferências também quanto aos riscos que estão dispostos a correr, em caso de incerteza.

Vistas assim as críticas que, algumas vezes, são feitas indevidamente à hipótese de racionalidade dos jogadores, vejamos agora algumas limitações que, efetivamente, são importantes na aplicação dessa hipótese.

Em primeiro lugar, há dificuldades importantes quando os jogadores não dispõem da informação necessária antes do processo de interação estratégica se iniciar e são obrigados a executar algum tipo de procedimento de "busca" de informação. A hipótese de que os jogadores são racionais não nos permite antecipar como se daria essa busca.

Nesse caso, o recurso a uma hipótese de racionalidade também na busca de informação, ou seja, uma hipótese adicional de que os jogadores buscariam informações até o ponto em que o benefício de obter um pouco mais de informação fosse

9 Para entender como erros podem ser conciliados com a hipótese de racionalidade em contextos de incerteza, imagine um jogador de futebol que bate um pênalti para o mesmo lado para o qual o goleiro se atirou, e com isso o goleiro consegue realizar a defesa. O fato de o jogador ter chutado no mesmo lado que o goleiro escolheu não pode, a princípio, ser atribuído a uma irracionalidade do jogador, mas sim à incerteza inerente da situação.

exatamente igual ao custo dessa busca, simplesmente não funciona. Isso porque o valor de um pouco mais de informação somente pode ser avaliado *depois* que já temos a informação.

Contudo, teríamos de saber o valor da informação *antes* de obtê-la e não depois, para que esse valor pudesse ser comparado ao custo da obtenção da informação. Um segredo somente é valioso porque não o conhecemos. Mas se não o conhecemos, como saber o seu valor?

Uma segunda dificuldade diz respeito ao fato de que, às vezes, a hipótese da racionalidade não basta para determinar o que os jogadores irão fazer: é preciso considerar o contexto social e cultural em que se encontram, para podermos analisar seu comportamento. Em outras palavras, algumas vezes a racionalidade somente é exercida em *um dado contexto* de regras sociais ou de valores culturais.

Como ilustração, considere a seguinte hipótese. Imagine que você deseja conhecer empresários nos Estados Unidos interessados em adquirir o produto que você deseja vender, e que esses empresários, por sua vez, também estariam interessados no seu produto. Como estabelecer contatos comerciais?

Ao aplicar a hipótese de racionalidade a essa situação, você provavelmente concluiria que a melhor decisão seria fazer contato por telefone, correio eletrônico ou em visitas pessoais aos escritórios desses executivos, com o objetivo de realizar seus negócios da forma mais rápida e barata, para você e seus clientes, correto?

Segundo Eric Posner, em seu livro *Law and Social Norms* (Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 2000), essa escolha seria uma decisão totalmente equivocada! Para fechar seus negócios, você deveria adotar um método mais lento, custoso e peculiar, mas eficaz: tornar-se membro do clube de golfe local e aprender a jogar.

Isso porque a maioria dos empresários norte-americanos gosta de fechar seus negócios em longas partidas de golfe. E haveria ainda mais um ritual a cumprir: o negócio somente deveria ser tratado no final da partida. Antes, você deveria falar de sua família, de esportes etc., como se não estivesse ali para fechar um negócio.

Os empresários que fecham seus negócios em partidas de golfe não deixaram de ser racionais. Apenas exercem essa racionalidade em um *contexto cultural e social*, que recomenda que os negócios sejam tratados em partidas de golfe. O exercício da racionalidade aqui se encontra subordinado a *normas sociais*, e utilizar exclusivamente a hipótese de que os jogadores são racionais não nos permitira entender a forma como o jogo de negociação é jogado.

Na verdade, nem mesmo as hipóteses que caracterizam as preferências dos jogadores como racionais podem ser consideradas válidas em todos os casos.

Consideremos inicialmente a hipótese de que as preferências são completas. Uma observação óbvia a ser feita é que nem sempre conseguimos comparar duas possibilidades, pelo simples fato de não termos informações suficientes. Por exemplo, muitas pessoas poderiam ter dificuldade para responder à seguinte pergunta: o que você preferiria, uma viagem grátis a Burkina Fasso ou a Sumatra?

Assim, as possibilidades da teoria dos jogos, como instrumento de compreensão e análise de uma realidade de interação estratégica, devem ser estabelecidas com muito cuidado. A teoria dos jogos não deve ser utilizada indiscriminadamente como instrumento de previsão do comportamento de agentes em situações de interação estratégica, nem tampouco como "receita" pronta de como se deve agir em uma situação específica.

Na verdade, como vimos na ilustração fornecida pelo livro de Eric Posner, muitos fatores podem interferir na realidade concreta em comparação com aquilo que é previsto pela teoria.

É possível estabelecer algumas condições necessárias (ainda que não suficientes),[10] para que os agentes possam apresentar um comportamento racional em uma situação de interação estratégica. Essas condições foram estabelecidas por Ken Binmore, um dos mais importantes estudiosos de teoria de jogos da atualidade:[11]

1. O jogo (isto é, a representação do processo de interação estratégica) é relativamente simples.
2. Os jogadores jogaram o jogo muitas vezes antes, e assim tiveram a possibilidade de aprender por meio de tentativa e erro.
3. Os incentivos para jogar bem (isto é, *racionalmente*) são adequados.

Mais adiante discutiremos essas três condições mais detalhadamente. Por agora podemos adiantar que, sendo o jogo relativamente simples, os agentes não terão muita dificuldade em levantar as informações necessárias para formular e corrigir suas hipóteses acerca da melhor maneira de jogar.

Se os jogadores aprenderam por meio de várias tentativas, não terão dificuldade em compreender quais são as regras do jogo, os tipos de jogadores que podem enfrentar e as melhores estratégias para cada caso: muitas vezes abrimos mão de um comportamento racional apenas porque a complexidade da si-

---

10 Essas condições não são suficientes porque, conforme foi visto, mesmo quando os jogadores desejam agir racionalmente, o cálculo racional pode falhar.

11 K. Binmore, *Fun and Games*, Lexington, Mass., D. C. Heath, 1992, p. 51.

tuação ou nossa ignorância do que está em jogo tornam evidente a impossibilidade de chegar a uma decisão de maneira racional.

Finalmente, se os incentivos a jogar bem, isto é, racionalmente, são adequados, podemos esperar que os jogadores fiquem menos tentados a decidir com base nas suas emoções, no recurso a alguma tradição ou a seus valores pessoais, pelo fato de que esses incentivos tornam uma decisão estratégica equivocada muito custosa.

É fácil perceber que as três condições anteriores se aplicam a um grande número de situações de interação estratégica na economia, especialmente aquelas que envolvem grandes empresas. Consideremos a primeira condição, de que a interação estratégica representada na forma de um jogo seja *simples*.

Por interação estratégica simples devemos entender uma situação em que o número de jogadores envolvidos, suas características, as estratégias de que dispõem e as circunstâncias do ambiente que podem afetar o desenvolvimento do jogo não tornam difícil a compreensão e a modelagem do processo de interação estratégica por parte de cada jogador.

Voltando a nossos exemplos, tomando o caso de uma montadora de automóveis que opera em um oligopólio e tem de decidir sobre seu preço, como em qualquer caso de cartel, temos, *em geral*, uma situação de interação relativamente simples: são frequentemente poucos jogadores (senão o cartel é inviável), as empresas têm aproximadamente as mesmas características (cartéis em geral são formados por empresas mais ou menos homogêneas), as estratégias são limitadas (preço igual ou menor do que os dos concorrentes), e a legislação de defesa da concorrência não muda com frequência, de forma que, em geral, o ambiente no qual a interação se processa é relativamente estável.

Vejamos agora a segunda e a terceira condições. No que diz respeito à segunda condição, como setores oligopolizados são relativamente estáveis (há pouca entrada e saída de empresas), os jogadores já tiveram oportunidade de aprender, por meio de tentativa e erro, quais são as características das outras empresas, da demanda do mercado etc.

Com relação à terceira condição, há fortes incentivos para que os jogadores se comportem racionalmente, pois decisões irracionais, isto é, decisões que sejam inadequadas em relação ao objetivo de maximização de lucros, podem colocar em risco os empregos dos executivos responsáveis pelas estratégias das empresas.

Todavia, ainda assim é preciso cuidado ao utilizar a teoria dos jogos para um caso concreto. Isso porque, também muitas vezes, a situação de interação estratégica não é simples, ou é nova para os jogadores, ou os incentivos não são adequados. Para entender isso basta alterar um pouco alguns dos nossos exemplos.

Imagine, por exemplo, que a empresa química que citamos está decidindo acerca da construção de uma nova planta em um país estrangeiro onde ainda não opera ou que o país da Opep tem de tomar sua decisão em um momento em que existe a possibilidade de uma nova guerra no Oriente Médio. Como muitas vezes a simplicidade da situação, o conhecimento dos jogadores do processo de interação e os incentivos são enganosos, é sempre necessário cuidado ao lidar com um caso concreto.

UMA MUITO BREVE HISTÓRIA DA TEORIA DOS JOGOS

Olhando retrospectivamente, vários autores foram precursores daquilo que hoje chamamos de teoria dos jogos. Talvez o primeiro a elaborar elementos importantes do método que seria formalizado e aplicado mais tarde na solução de um jogo tenha sido o matemático francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877), que publicou em 1838 seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses.*

No Capítulo 7 de seu livro, Cournot apresentou o famoso modelo de duopólio que hoje leva seu nome. Naquele modelo, duas empresas produzindo um bem homogêneo decidiam que quantidade cada uma iria produzir, sabendo que a quantidade que a outra produzisse afetaria seus lucros. Cournot derivou uma solução em que as duas empresas decidiam produzir quantidades que eram compatíveis entre si.

No século XX, o método empregado por Cournot para a solução do seu modelo de duopólio foi considerado por alguns economistas não apenas um precursor da análise de equilíbrio em jogos não-cooperativos (isto é, situações de interação estratégica em que não há a possibilidade de os agentes estabelecerem acordos acerca do seu comportamento durante a interação antes de ela ocorrer), mas verdadeiramente uma aplicação do mesmo método que John Nash, a respeito de quem falaremos mais adiante, desenvolveria mais tarde. Assim, há algumas referências na literatura a um equilíbrio de Cournot-Nash.

Roger B. Myerson argumenta convincentemente que isso é um equívoco. Myerson afirma que ainda que possamos considerar Cournot o fundador da análise moderna do oligopólio, não há fundamento para considerá-lo o fundador da teoria dos jogos. A razão disso é que sua solução de duopólio, embora apresente características do método que seria mais tarde empregado em jogos não-cooperativos, nunca se pretendeu uma teoria *geral* das interações estratégicas entre agentes, o que caracterizaria a análise de Cournot efetivamente como fundadora da teoria dos jogos.

Robert J. Leonard, por outro lado, argumenta que houve uma nova interpretação de Cournot *a partir* dos trabalhos de Nash, o que torna ainda mais discutível a primazia de Cournot sobre Nash no desenvolvimento da teoria dos jogos.

Outro precursor importante do advento da teoria dos jogos foi o matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953). Zermelo demonstrou que o jogo de xadrez sempre tinha uma solução, ou seja, que a partir de qualquer posição das peças no tabuleiro, um dos jogadores tem sempre uma estratégia vitoriosa, não importando o que o outro jogador faça.

A importância dessa solução residia, na verdade, no método empregado por Zermelo, que antecipava a técnica de solução que ficaria conhecida como indução reversa, e que será estudada neste livro.

Um terceiro precursor a ser lembrado é o matemático francês Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956). Antecipando a perspectiva que seria adotada em teoria dos jogos, Borel escreveu uma vez que "Os problemas de probabilidade e análise que se propõem com relação à arte da guerra, ou especulações econômicas e financeiras, não são isentos de analogia com os problemas que dizem respeito a jogos, embora possuam um maior grau de complexidade".

Na verdade, Borel não estava interessado em jogos de sorte, mas naqueles jogos que "dependiam simultaneamente da sorte e da habilidade do jogador", ou seja, em *jogos estratégicos*.

Com efeito, Borel foi o primeiro a formular o conceito moderno de *estratégia*, à qual denominou "método de jogo", e que definiu como um "código que determina para cada circunstância possível (supostamente finitas em número) exatamente o que a pessoa deve fazer" (*apud* Myerson, 1999, p. 1.071). John von Neumann daria crédito a Borel, mais tarde, pelo pioneirismo na formulação do conceito de estratégia.

Apesar desses precursores, a origem da teoria dos jogos está diretamente relacionada ao nome do matemático John von Neumann (1903-1957). Nascido na Hungria, von Neumann emigrou para os Estados Unidos na década de 1930. Sua primeira publicação sobre jogos data de 1928 ("Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen* 100, 295-320), na qual demonstra que a solução para jogos de soma zero (jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro) pode ser determinada utilizando-se técnicas matemáticas.

A análise dos jogos de soma zero viria a ser desenvolvida mais tarde em seu livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, publicado em 1944 e escrito em coautoria com o economista alemão Oskar Morgenstern (1902-1977), também emigrado para os Estados Unidos.

Além de jogos de soma zero, *The Theory of Games and Economic Behavior* também definiu a representação de jogos em forma extensiva, em que são identificadas as decisões de cada jogador em cada estágio do jogo, quando o jogo se desenvolve em etapas sucessivas; e discutiu cooperação e formação de coalizões entre os jogadores.

Embora tenha sido a pedra fundamental da teoria dos jogos, *The Theory of Games and Economic Behavior* tinha uma limitação séria: o fato de se concentrar em jogos de soma zero.

Obviamente, essa não é a descrição adequada para um grande número de interações sociais. Como instrumento de análise das interações entre indivíduos e organizações na sociedade, em particular na economia, os jogos de soma zero se mostram inadequadamente restritivos. Era preciso encontrar ferramentas teóricas que permitissem analisar uma variedade maior de modelos de interação estratégica.

Essas ferramentas seriam elaboradas, a partir de 1950, por John F. Nash, Jr., John C. Harsanyi e Reinhard Selten, o que acabaria fazendo com que os três fossem premiados com o Nobel de Economia em 1994. Vamos apresentar agora, muito resumidamente, as principais contribuições desses autores, não apenas pelo reconhecimento que o Prêmio Nobel lhes conferiu, mas também por acreditarmos que foram de fundamental importância para a crescente popularidade que a teoria dos jogos passou a desfrutar.

John F. Nash, Jr. (1928-), matemático norte-americano, é um dos mais importantes matemáticos do século XX. Nash definiu, em um artigo de 1951 ("Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics* 54, 286-295), uma noção de equilíbrio para modelos de jogos que não se restringia apenas aos jogos de soma zero.

Como teremos oportunidade de ver mais detalhadamente neste livro, o equilíbrio de Nash é aquele que resulta de cada jogador adotar a estratégia que é a melhor resposta às estratégias adotadas pelos demais jogadores.

A contribuição de John Nash foi fundamental para o desenvolvimento da teoria dos jogos. A partir de sua noção de equilíbrio foi possível estudar uma classe de jogos muito mais ampla do que os jogos de soma zero. Foi possível também demonstrar que, em alguns casos, quando cada jogador escolhe racionalmente aquela estratégia que seria a melhor resposta às estratégias dos demais, pode ocorrer que o resultado final para todos os jogadores seja insatisfatório e que, portanto, nem sempre a busca de cada indivíduo pelo melhor para si resulta no melhor para todos.

A principal contribuição do economista húngaro John C. Harsanyi (1920-2000) para a teoria dos jogos, na forma de três artigos ("Games with

Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, Parts I, II and III", *Management Science* 14, 159-182, 320-334 e 486-502), está relacionada ao fato de que, muitas vezes, alguns jogadores dispõem de informação privilegiada em relação aos demais sobre algum elemento importante do jogo.

Em outros termos, temos uma situação de *informação assimétrica*. Harsanyi desenvolveu um modelo para tratar desse tipo de situação, ao qual denominou modelo de informação incompleta. Ele mostrou que o conceito de equilíbrio de Nash poderia ser estendido para os modelos de informação incompleta.

Antes da contribuição de Harsanyi, os economistas não dispunham de instrumental adequado para tratar da situação de interação estratégica em que a assimetria de informação produzia incerteza. Assim, na maior parte dos modelos, ou se supunha absoluta certeza, ou se supunha que havia uma distribuição de probabilidades objetivamente relacionada aos eventos possíveis, e que essa distribuição de probabilidades era do conhecimento de todos os agentes. A partir da contribuição de Harsanyi, os economistas se viram em condições de tratar formalmente situações de interação estratégica envolvendo assimetria de informação.

O matemático e economista alemão Reinhard Selten (1930-), em seu artigo publicado em 1965 "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit" (*Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft* 121, 301-324 e 667-689), foi responsável por um refinamento da noção de equilíbrio que ficou conhecido como "equilíbrio perfeito em subjogos", significando que uma determinada estratégia, para ser considerada um equilíbrio perfeito em subjogos, tem de ser ótima considerando-se todos os possíveis desdobramentos do processo de interação estratégica.

Esse refinamento (que conduz a uma noção mais restritiva de equilíbrio do que o equilíbrio de Nash) foi de fundamental importância em análises estratégicas, pois, em jogos que envolvem compromissos e ameaças, permitiu determinar quais compromissos e ameaças eram plausíveis e quais não eram.

Mas os desenvolvimentos em teoria dos jogos não se limitaram apenas aos casos anteriores. Foi graças às formulações matemáticas de Robert J. Aumann que os teóricos de jogos conseguiram demonstrar que, se a relação entre os indivíduos ou as organizações tem uma boa chance de durar por tempo indeterminado – e caso não haja uma grande pressa de ganhos em curto prazo –, a cooperação deve se estabelecer, mesmo em uma situação como a do dilema do prisioneiro.

Assim, mesmo que haja um ganho significativo no desrespeito a um contrato, e desde que as empresas envolvidas tenham a expectativa de que a relação se prolongue e não estejam muito impacientes pela realização desses ganhos

(como poderia ser o caso se estivessem endividadas, precisando cobrir suas dívidas), há uma boa chance de a cooperação se estabelecer.

As aplicações desse tipo de análise são várias. Por exemplo, conforme teremos a oportunidade de ver neste livro, uma aplicação importante se dá no estudo de cartéis, uma vez que um cartel é uma situação semelhante àquela representada no dilema do prisioneiro: se a empresa cumpre a determinação do cartel e reduz sua produção para aumentar o preço de mercado de seu produto, ela ganha. Contudo, se a empresa não cumpre a determinação do cartel e não reduz sua produção, ela ganha ainda mais, pois sua produção, cujo nível será normal, será vendida a um preço de mercado mais alto, resultado do fato de que as demais empresas do cartel estarão reduzindo a produção delas para sustentar o cartel.

Mas, se todas as empresas pensarem assim – é razoável supor que elas pensem desse modo, pois empresas tendem a agir racionalmente –, nenhuma delas reduz sua produção, e o cartel fracassa. A formulação de Aumann nos ajuda a entender, em situações como essa, quando o cartel pode ser bem-sucedido, apesar dessa possibilidade de ganho.

Também na guerra fria entre Estados Unidos e a extinta União Soviética, teóricos de jogos tiveram uma participação importante. Em 1960, Thomas C. Schelling publicou um de seus mais importantes livros, *The Strategy of Conflict*, em um dos momentos críticos da guerra fria entre os Estados Unidos e a então União Soviética. Naquele momento, a escalada armamentista e a questão da dissuasão de uma ameaça nuclear eram centrais para a sobrevivência das grandes potências.

The Strategy of Conflict apresentava um grande número de intuições importantes pela aplicação da teoria dos jogos não apenas aos problemas das grandes potências, mas também a todas as situações de cooperação ou conflito. Vamos mencionar apenas algumas delas.

Uma dessas intuições foi a de que uma das formas de deter uma ameaça é tornar a resposta a ela imprevisível, e isso não apenas para o inimigo, mas também para quem está sendo ameaçado. Se a resposta a uma agressão não for perfeitamente previsível – inclusive para a parte que responde à agressão –, estará sendo criado, para o inimigo, um risco que pode ser suficientemente forte para detê-lo.

Schelling também mostrou que, em algumas situações, pode ser interessante deixar para si mesmo somente a pior opção. Um exemplo é o caso de um general que elimina qualquer chance de retirada, para deixar bem claro ao inimigo que, em caso de ataque, não lhe restará nada a não ser lutar até o fim.

Outra contribuição importante de Schelling diz respeito à ideia de ponto focal. Um ponto focal é um elemento que se destaca em um contexto e que

permite aos indivíduos coordenarem suas decisões, de forma a promover um resultado melhor para todos, mesmo quando não há a possibilidade de comunicação.

Por exemplo: imagine que você chegou a uma pequena cidade onde deve encontrar uma pessoa, mas com a qual não tem como se comunicar para definir o local de encontro. Se a cidade tiver cem casas, duas escolas e uma igreja, a escolha mais natural é que ambos se encaminhem para a igreja, que, por ser única, se destaca do contexto.

Esse tipo de coordenação é atualmente utilizado para estudar normas sociais como pontos focais, instrumentos que permitem aos agentes se coordenarem antes mesmo de se comunicarem. Esse é o papel, por exemplo, de um clube que seja o único frequentado por empresários que queiram fechar negócios.

Assim, novos campos de pesquisa, que vão desde os problemas de negociação envolvendo barganha até a evolução de populações, têm sido objeto de desenvolvimentos teóricos, na forma de jogos. A teoria dos jogos é hoje aplicada à economia, administração, direito, ciência política, questões de natureza militar e biologia, tendo se tornado instrumento essencial no estudo de qualquer processo de interação em que os agentes reconheçam que suas decisões se influenciam mutuamente.

EXERCÍCIOS

1.1. Discuta se a relação binária $\succeq$ ("maior ou igual a") poderia expressar preferências racionais.

1.2. Quais são as propriedades da relação de preferência estrita $\succ$?

1.3. Quais são as propriedades da relação de indiferença $\sim$?

1.4. Um filho único de uma mãe viúva se preocupa tanto com a sua renda quanto com a renda de sua mãe, embora não more mais com ela. Como ela já é idosa e não tem boa saúde, ele atribui uma satisfação duas vezes maior à renda que sua mãe obtém em comparação com a renda que ele mesmo consegue obter. Pede-se:

   a. Determinar em que ordem o filho ordena as seguintes recompensas (o primeiro valor é a sua própria renda, o segundo é a renda de sua mãe): (3,2), (4,0) e (1,5).

   b. Determinar uma função a ser aplicada às suas recompensas e às de sua mãe, que seja consistente com o ordenamento de suas preferências.

1.5. Seja o conjunto Y de sobremesas à disposição de um indivíduo, onde $Y = \{$*abacaxi, banana, sorvete, doce de leite*$\}$. Suponha que o indivíduo expresse a seguinte relação de preferências $\succeq$ entre as sobremesas: *abacaxi* $\succeq$ *banana*, *banana* $\succeq$ *sorvete*, *sorvete* $\succeq$ *doce de leite*, *abacaxi* $\succeq$ *sorvete*, *abacaxi* $\succeq$ *doce de leite*, *banana* $\succeq$ *doce de leite*. Você diria que as preferências que ele expressou são racionais?

2

Modelos de Jogos: Representando uma Situação de Interação Estratégica

Quando se atinge o caminho da estratégia, não haverá mais nada que não se possa compreender, e se verá o caminho em tudo.

MIYAMOTO MUSASHI, ESPADACHIM E POETA JAPONÊS (1584?–1645)

INTRODUÇÃO

Neste capítulo discutiremos como se modela um jogo. Não basta apenas reconhecer que em várias circunstâncias importantes, na economia e no mundo dos negócios, empresas, governo e consumidores se envolvem em processos de interação estratégica: é preciso também saber como modelar esses processos e como analisá-los, procurando determinar as possíveis consequências dessas interações ou, para utilizar a linguagem da teoria dos jogos, os possíveis *resultados* do jogo.

Assim, iremos discutir como se modela um jogo, quais são os elementos fundamentais que devem sempre fazer parte de um modelo e que tipos de modelos podem ser construídos.

Para isso iremos discutir como poderiam ser modeladas duas situações hipotéticas bastante simples. Na primeira situação, dois bancos (que chamaremos de Banco A e Banco B) têm de decidir se renovam ou não seus empréstimos a uma firma em dificuldades financeiras.

EXEMPLO 1

O problema da renovação dos empréstimos de dois bancos

Suponha que, para iniciar suas atividades, uma empresa tomou emprestado 5 milhões de reais em um banco, que chamaremos de Banco A, e em um segundo Banco, o Banco B, mais 5 milhões, perfazendo um total de 10 milhões de reais em empréstimos.

Vamos supor, para simplificar o problema, que a empresa não possui capital próprio, apenas capital de terceiros. Embora esse tipo de situação seja incomum, facilita nosso raciocínio, sem alterar fundamentalmente a situação de interação estratégica que queremos estudar.

Vamos supor que, em virtude de maus negócios, após um ano de operação, seus ativos se depreciaram significativamente: embora inicialmente a empresa dispusesse de 10 milhões de capital, que correspondiam aos dois empréstimos de 5 milhões, hoje os ativos totais da empresa valeriam apenas 6 milhões, insuficientes para cobrir o total de empréstimos, de 10 milhões, caso os bancos decidissem cobrá-los. Mais grave ainda, a perspectiva é que a empresa continue operando por apenas mais um ano.

Na segunda situação, uma fabricante de automóveis (vamos chamar essa empresa de Inovadora) tem de decidir se introduz ou não uma van para competir com a empresa dominante no mercado (que chamaremos de Líder).

EXEMPLO 2

Lançar ou não um produto competidor?

Suponha que uma empresa automobilística ainda não possui um modelo de van no mercado, enquanto sua concorrente já produz um modelo de van bem-sucedido. A empresa que ainda não produz vans tem de decidir se lança, ou não, o seu modelo, pelo que podemos chamar essa empresa de "Inovadora". A empresa que já possui um modelo de van será denominada "Líder", uma vez que lançou seu modelo primeiro. A empresa Líder tem de decidir se mantém o preço de sua van como está ou se reduz esse preço para competir com a van da empresa Inovadora, caso ela efetivamente decida lançá-la.

A particularidade nessa situação de interação estratégica é que a Inovadora decide se lançará ou não sua van *antes* de a Líder decidir se mantém ou reduz o preço do seu próprio modelo. Em outras palavras, a Líder decidirá o que fazer já conhecendo a decisão da Inovadora.

Vamos apresentar os conceitos básicos de jogos em relação a esses dois exemplos, ao mesmo tempo em que iremos discutir não apenas as diferentes formas pelas quais podemos modelar interações estratégicas, mas, principalmente, qual forma é a mais conveniente, dadas as possíveis circunstâncias em um caso concreto.

O leitor não deve perder de vista que, ao modelar um jogo, o que se está fazendo é representar uma situação de interação estratégica de forma abstrata, isto é, focalizando-se apenas aqueles elementos considerados mais importantes para explicar como os agentes (jogadores) interagem entre si. Assim, qualquer modelo sempre será uma representação muito simplificada de uma realidade infinitamente mais complexa.

O importante é que o modelo, na medida em que incorpore os elementos realmente significativos e sua estrutura seja coerente com a forma pela qual se processa a interação estratégica, sirva como um guia eficiente para o entendimento de fenômenos da vida econômica, empresarial e social.

Veremos, ao estudarmos de que forma essas duas situações muito simples de interação estratégica podem ser modeladas, que uma primeira distinção importante entre as situações de interação estratégica diz respeito a se os jogadores conhecem antecipadamente, ou não, as decisões dos outros jogadores, antes de terem de tomar suas próprias decisões. Veremos que a modelagem é diferente dependendo do caso em questão.

Nosso próximo passo, assim, será iniciar o estudo acerca de como podemos representar uma situação de interação estratégica, seja ela na economia, na política ou em qualquer outra atividade em que indivíduos ou organizações interagem reciprocamente e reconhecem este fato. Veremos agora os elementos básicos de um modelo de jogo.

REPRESENTANDO AS AÇÕES DOS JOGADORES E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Vimos no capítulo anterior que jogos são modelos que tratam de interações estratégicas e que interações estratégicas, por sua vez, são o resultado do reconhecimento por parte de cada um dos agentes (jogadores), de que suas ações afetam os demais e vice-versa.

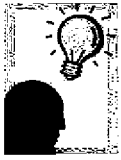
Agora é o momento de dar um sentido mais preciso ao que devemos entender por uma estratégia e quais são os seus elementos. Inicialmente, temos de caracterizar com maior precisão o que entendemos por um *jogador*. Tendo em vista o que discutimos no capítulo anterior, eis como podemos definir um jogador:

Um jogador é qualquer indivíduo ou organização envolvido no processo de interação estratégica que tenha autonomia para tomar decisões.

Vamos supor sempre que um número finito de jogadores participa do processo de interação estratégica, que será modelado na forma de jogo. Vamos

também assumir que o objetivo de todo jogador é obter o melhor resultado possível do processo de interação estratégica, dadas as suas preferências.

Contudo, na busca do melhor resultado possível, cada jogador é obrigado a interagir com os demais. Para estudar como se dá esse processo de interação, vamos iniciar com o conceito mais simples que vai servir de base à noção de estratégia – o conceito de *ação* ou *movimento*:



Uma *ação* ou *movimento* de um jogador é uma escolha que ele pode fazer em um dado momento do jogo.

Cada jogador teria, então, certo número de ações disponíveis, e essas ações formariam seu *conjunto de ações*. Assim, no exemplo dos dois bancos que têm de decidir se renovam ou não o empréstimo à empresa em dificuldades, A_A seria o conjunto de todas as ações possíveis do Banco A e A_B, o conjunto de todas as ações possíveis do Banco B.

Contudo, não obstante na maior parte das vezes ilustremos nossas discussões com um jogo de dois jogadores, jogos não precisam se restringir a dois jogadores apenas. Podemos ter vários jogadores, com várias ações possíveis. Nesse caso, muitas vezes é mais prático indicar um jogador e suas ações por meio de subíndices.

Assim, generalizando, em um jogo em que cada jogador é identificado por um subíndice i, onde $i = 1, 2, ..., n$, o conjunto de ações do *i-ésimo* jogador lista *todas* as ações disponíveis para aquele jogador, e pode ser representado da seguinte forma:

$$A_i = \{a_i\}$$

O que significa que o conjunto de ações A_i tem como seus elementos todas as ações disponíveis para o jogador i (representadas por a_i). Por exemplo, se as duas únicas ações disponíveis para o Banco A, no Exemplo 1, fossem "renova o empréstimo" ou "não renova o empréstimo",[1] seu conjunto de ações seria simplesmente:

$$A_A = \{\text{Renova o empréstimo, Não renova o empréstimo}\}$$

1 O leitor pode estar achando estranho o fato de que *não* fazer algo seja considerado uma "ação" em um jogo. Mas uma ação em teoria dos jogos deve ser entendida como uma *decisão* e não no sentido corrente de "atividade". Mesmo que um agente decida não fazer nada, ainda assim isso será uma resposta aos demais jogadores.

Por um raciocínio análogo, se o Banco B dispusesse das mesmas opções, seu conjunto de ações seria:

$$A_B = \{\text{Renova o empréstimo, Não renova o empréstimo}\}$$

Conhecer o conjunto de ações de cada jogador é um passo fundamental na análise de um processo de interação estratégica. Com efeito, as possibilidades de interação estratégica dependem de *todas as ações relevantes disponíveis* para os jogadores. Ao avaliar a melhor ação, cada jogador considera não apenas todas as ações relevantes de que dispõe, mas também todas as ações relevantes disponíveis para os demais jogadores.

Um agente que não considerasse alguma ação significativa para o desenvolvimento do jogo a sua disposição, ou à disposição dos demais jogadores, seria irracional no sentido que discutimos o termo no capítulo anterior: ele não estaria considerando todas as informações disponíveis antes de tomar sua decisão.

Isso não significa que ele não possa descartar determinadas ações como sendo inadequadas aos seus objetivos, dadas as possibilidades de resposta dos demais jogadores. Mas mesmo esse julgamento deve ser o resultado de uma avaliação de *todas as ações possíveis relevantes* no jogo.

Todavia, não basta considerar as ações possíveis, é importante também conhecer como essas ações se desenvolvem no jogo. Em outras palavras, os jogadores tomam suas decisões ao mesmo tempo, ou sucessivamente. Caso em alguma etapa do jogo eles tomem suas decisões sucessivamente, é importante saber se o jogador que decide em uma etapa seguinte conhece ou não conhece a decisão do jogador anterior

Por exemplo, considerando o exemplo dos bancos, a decisão a ser tomada é mais difícil se cada banco tem de escolher o que fazer em relação ao seu empréstimo sem conhecer a decisão do outro, do que se um deles tem a chance de decidir conhecendo a escolha do outro.

Também no caso das empresas no mercado automobilístico, é fácil perceber que o processo de interação é completamente diferente, conforme no Exemplo 2, a Líder decida depois da Inovadora, ou simultaneamente. Se a Líder decide o preço de sua van *depois* de saber se a Inovadora efetivamente lançou seu novo produto, ela terá mais informação no momento de decidir e, eventualmente, pode acabar por obter uma melhor situação ao fim do jogo do que se fosse obrigada a decidir *ao mesmo tempo* em que a Inovadora decide se lança sua van. Nesse último caso, a Líder teria de escolher sua ação sem saber qual será a escolha da Inovadora, possuindo, dessa forma, menos informação.

Podemos perceber, assim, que diferentes processos de interação demandam diferentes representações. Vamos iniciar nosso estudo de teoria dos jogos com os dois modelos básicos de jogos para tratar de processos de interação estratégica: jogos simultâneos e jogos sequenciais.

Empregando a Forma Estratégica ou Normal para Representar um Jogo Simultâneo

A forma mais simples de apresentar um jogo simultâneo é por meio da forma estratégica ou normal. Para analisar a forma estratégica, utilizaremos o exemplo dos dois bancos que têm de decidir se renovam ou não seus empréstimos para uma empresa em dificuldades financeiras. Mas para isso precisamos de mais informação: precisamos saber quais são as ações que cada banco pode adotar e quais seriam as consequências das várias combinações de ações.

No que diz respeito às ações, vamos supor que os bancos somente possuem duas opções: renovar ou não os empréstimos. Caso o banco decida renovar, ele continua recebendo o pagamento dos juros. Caso decida não renovar, a empresa é obrigada a reembolsar o principal do empréstimo.

Vimos no box do Exemplo 1 que a empresa tomou emprestado de cada banco 5 milhões de reais, mas que, em virtude de seus maus negócios, seus ativos valem menos do que a soma de seus empréstimos: os ativos totais da empresa seriam de 6 milhões, insuficientes para cobrir o total de empréstimos, que é de 10 milhões. Se os bancos decidirem renovar seus empréstimos, a perspectiva é de que a empresa consiga se manter operando por mais um ano, pagando normalmente os juros a partir de sua receita corrente, no valor de 1 milhão de reais para cada banco.

Após isso, a empresa seria provavelmente obrigada a decretar falência. Decretando sua falência, os bancos dividiriam os ativos no valor de 6 milhões de reais, resultando para cada banco, ao final, um total de 4 milhões: 3 milhões da partilha dos ativos da empresa mais 1 milhão do pagamento de juros.

Todavia, se um dos bancos decide não renovar seu crédito, ele recebe integralmente seu empréstimo de 5 milhões de volta, mas acaba precipitando a falência da empresa. Como ela seria obrigada a pagar de volta o empréstimo, só restaria ao banco que renovou seus créditos reclamar os ativos remanescentes no valor de 1 milhão (resultantes da venda de 5 dos 6 milhões de ativos da empresa).

A última possibilidade é a de que os dois bancos decidam, ao mesmo tempo, não renovar seus empréstimos: nesse caso, como os ativos da empresa são insuficientes para cobrir a demanda dos bancos, ela é obrigada a decretar imediata-

	Banco B	
Banco A	**Renova**	**Não Renova**
Renova	4, 4	1, 5
Não Renova	5,1	3, 3

Figura 2.1 Jogo em Forma Estratégica ou Normal

mente sua falência, o que leva os dois bancos a partilharem seus ativos e obterem, assim, 3 milhões de reais cada um. Temos na Figura 2.1, a representação do hipotético jogo dos bancos em forma estratégica.

Vejamos os elementos que compõem a forma estratégica, observando a figura. A representação em forma estratégica é constituída por uma tabela em que as estratégias de um jogador se encontram listadas nas linhas e as estratégias do outro jogador são listadas nas colunas (veremos o conceito de estratégias com mais precisão mais adiante). Assim, as possíveis ações do Banco A {*renova, não renova*} estão nas linhas da tabela e as possíveis ações do Banco B estão nas colunas {*renova, não renova*}.

Além das estratégias possíveis de cada jogador, a forma estratégica apresenta as *recompensas*[2] que cada jogador recebe por suas escolhas, em função das escolhas do outro jogador.

Uma *recompensa* é aquilo que todo jogador obtém depois de encerrado o jogo, de acordo com suas próprias escolhas e as dos demais jogadores.

Um elemento importante da especificação de um jogo é, portanto, a *função de recompensa* de cada jogador. A função de recompensa apenas especifica um valor numérico que nos ajuda a perceber como o jogador avalia um determinado resultado do jogo.

Assim, seja um resultado qualquer do processo de interação estratégica, ao qual chamaremos genericamente de x, e qualquer outro resultado do processo de interação estratégica, y. Uma função de recompensa para esse jogador será uma função f tal que:

$$f(x) \geq f(y) \text{ sempre que } x \succeq y$$

2 Do inglês *payoff*.

Onde $f(x) \geq f(y)$ significa "$f(x)$ maior ou igual a $f(y)$" e $x \succeq y$ significa "x pelo menos tão preferível quanto y". Assim, o que a função de recompensa faz é traduzir em números uma preferência do jogador entre dois resultados possíveis, x e y. Ou seja, uma função de recompensa será aquela que, para um dado jogador, associe um valor maior ou igual a um resultado do jogo do que a outro, se esse jogador achar ao menos tão bom o primeiro resultado quanto o segundo.

O leitor não deve se confundir com o sinal $\succeq$. Ele expressa uma relação de preferências e não uma relação quantitativa. Se alguém nos diz que "ir à praia $\succeq$ jogar tênis", isso não implica nenhuma relação quantitativa. Esse alguém apenas está nos informando que acha *pelo menos* tão bom ir à praia quanto jogar uma partida de tênis. A relação $\succeq$ permite comparar coisas diferentes, pois é apenas uma relação de preferência, e por isso pode ser (e é até mais razoável que seja) aplicada a coisas diferentes.

Isso é muito diferente de a mesma pessoa nos informar que "a quantidade de dinheiro que possui no banco" $\geq$ "quantidade de dinheiro que possui nos bolsos". Nesse caso, estaremos sempre comparando diferentes quantidades de uma mesma coisa, pois de outra forma poderia se tornar impossível aplicar a noção de "maior ou igual": um chope gelado não pode ser "maior ou igual" a uma sessão de cinema!

O leitor deve ter reparado que enfatizamos a expressão *pelo menos* ao afirmar que $x \succeq y$ significa que x é pelo menos tão bom quanto y. Isso porque conforme vimos no capítulo anterior, a expressão $x \succeq y$ não nos permite discernir se x é *apenas* tão bom quanto y ou *estritamente preferível* a y. Quando queremos indicar que algo é estritamente preferível a uma outra coisa escrevemos o sinal $\succ$, da seguinte forma: $a \succ b$, o que se lê como "a é estritamente preferível a b". Por outro lado, se há realmente indiferença entre a e b, escreve-se $\sim$ e se lê como "a é indiferente com relação a b".

Aqui vale fazer uma pequena ressalva acerca da função de recompensa, para evitar equívocos. Essa função de recompensa visa apenas a traduzir numericamente as preferências individuais: ela não pretende de modo algum "medir" as preferências dos jogadores, da mesma forma que se medem grandezas físicas.

Desse modo, se dada uma situação x e outra situação y, o jogador preferir estritamente o resultado x ao resultado y do jogo, ao empregarmos uma função de recompensa f tal que, por exemplo, $f(x) = 3$ e $f(y) = ½$, os números 3 e ½ não significam nada além do fato de que, por ser 3 maior do que ½, o jogador prefere estritamente x a y.

Não há aqui uma "medida" de preferências, no mesmo sentido em que dizemos que um livro pesa 100 gramas mais do que outro, ou que uma rua é 20 metros mais comprida do que outra. Na verdade, qualquer função matemática que

atribua valores a resultados do jogo, valores esses *que respeitem o ordenamento de preferências do jogador*, é válida.[3]

Como não há a pretensão de medir as preferências dos jogadores, também não pode haver a pretensão de comparar essas preferências. Vamos supor que, para um jogador, obtivemos $f(x) = 3$, enquanto para outro, obtivemos $g(x) = 6$ (note que as funções de recompensa são diferentes para cada jogador, enfatizando que as preferências de cada jogador podem diferir no ordenamento dos resultados). Isso *não* significa que o segundo jogador prefere o resultado x duas vezes mais do que o primeiro.

Os resultados anteriores apenas significam que o primeiro jogador prefere o resultado x a um outro resultado y que lhe dê, por exemplo, $f(y) = 2$, enquanto o segundo jogador acha preferível x a um outro resultado z tal que $g(z) = 5$, por exemplo. *Devemos empregar a função de recompensa apenas para ordenar as preferências de um mesmo jogador e nunca para ordenar as preferências de jogadores diferentes.*

Essas recompensas tanto podem ser constituídas pela utilidade que um jogador obtém depois de jogado o jogo, como podem ser constituídas pelo valor monetário que resulta ao fim do jogo. Nesse último sentido, poderíamos imaginar as recompensas do Banco A e do Banco B como os reembolsos a serem obtidos por essas duas empresas de acordo com suas escolhas.

Na verdade, sempre que empregamos o valor monetário para expressar diretamente as preferências dos jogadores quanto ao resultado de um processo de interação, ou seja, de um jogo, estamos fazendo a hipótese implícita de que os jogadores preferem mais dinheiro a menos.

As recompensas do Banco A e do Banco B podem ser vistas nos números nas células da Figura 2.1, na qual o primeiro número representa a recompensa do jogador que tem suas ações representadas nas linhas, enquanto o segundo número representa a recompensa do jogador que tem suas ações representadas nas colunas. Dessa forma, se o Banco A decide renovar, ao mesmo tempo em que o Banco B decide não renovar, o Banco A obtém uma recompensa de 1 milhão de reais, enquanto a recompensa do Banco B é de 5 milhões.

É importante destacar dois aspectos da interação que estamos modelando por meio da forma estratégica. O primeiro deles diz respeito ao fato de que cada jogador ignora a decisão do outro no momento em que toma sua decisão: um banco não sabe o que o outro banco está decidindo quanto ao seu empréstimo.

---

3 O leitor deve consultar os exercícios 2.1 e 2.2 para uma conceituação um pouco mais precisa quanto ao tipo de função matemática que pode ser aplicada para representar um dado ordenamento das preferências dos jogadores.

O segundo aspecto é o fato de que nada indica que os dois jogadores estão considerando possíveis desdobramentos no tempo de suas decisões: parecem considerar apenas as consequências imediatas em termos da lucratividade de suas empresas.

Esses dois aspectos bastam para caracterizar o jogo que apresentamos na Figura 2.1 como um *jogo simultâneo.*[4]

Jogos simultâneos são aqueles em que cada jogador ignora as decisões dos demais no momento em que toma a sua própria decisão, e os jogadores não se preocupam com as consequências futuras de suas escolhas.

A forma estratégica nos fornece, assim, todas as combinações possíveis de ações dos jogadores, assim como os seus resultados: ela nos informa quem fez o quê e quanto conseguiu, em função de suas escolhas e das dos outros jogadores. Para o caso de um jogo simultâneo com apenas dois jogadores, é a forma mais conveniente de modelagem.

Mas jogos simultâneos possuem uma evidente limitação: não são adequados para descrever *um processo de interação que se desenrola em etapas sucessivas* – nesse tipo de interação estratégica, supor que cada jogador ignora as decisões dos demais pode não ser a forma mais conveniente de se analisar o que realmente está ocorrendo. Para isso contamos com jogos sequenciais, nosso próximo assunto.

Empregando a Forma Estendida para Representar um Jogo Sequencial

Jogos simultâneos não nos fornecem informações sobre eventuais desdobramentos futuros das escolhas dos jogadores. Contudo, muitas vezes, o processo de interação estratégica se desenvolve em etapas sucessivas.

Desse modo, muitas vezes os jogadores fazem escolhas a partir do que os outros jogadores decidiram no passado e, portanto, nem sempre as decisões são tomadas ignorando as decisões dos demais jogadores. Da mesma forma, nesse tipo de interação, as escolhas presentes exigem considerar as consequências futuras, uma vez que os demais jogadores poderão retaliar em etapas posteriores do jogo.

Isso exige um modelo para representar e analisar um jogo diferente dos jogos simultâneos, um jogo mais adequado para dar conta do desdobramento su-

4 Também denominados jogos *estáticos*.

cessivo das interações estratégicas: o jogo sequencial. Da mesma forma que apresentamos jogos simultâneos por meio da forma estratégica, apresentaremos a noção de jogos sequenciais utilizando a *forma estendida*, exemplificada na Figura 2.2 a seguir.

A Figura 2.2 é a representação de um jogo entre a Inovadora e a Líder em que a Inovadora decide *antes* se vai ou não introduzir seu novo modelo de van, e a partir daí a Líder toma sua decisão, já conhecendo a escolha da Inovadora. Caso a Inovadora decida lançar sua própria van e a empresa Líder reduza o preço da sua, cada empresa obtém um lucro na produção de vans de 2 milhões de reais, uma vez que ambas disputam o mercado acirradamente.

Por outro lado, se nessas circunstâncias a Líder decide manter inalterado o preço de sua van, suas vendas se reduzem significativamente e seus lucros caem para 1 milhão, enquanto a Inovadora ocupa mercado e vê seus lucros aumentarem para 4 milhões (estamos supondo que os consumidores têm um grande interesse por novidades, o que obriga as empresas estabelecidas a competir com novos modelos ou por meio de redução significativa de preços).

A outra possibilidade é que a Inovadora decida não lançar sua van. Nesse caso, a decisão da Líder de reduzir ou não o preço de sua van vai afetar apenas seus lucros (3 milhões em um caso, 4 milhões no outro), mas não os lucros da Inovadora, que não possui um concorrente direto para a van da Líder (nos dois casos seu lucro é de 1 milhão). É importante que o leitor não esqueça que a Líder sempre decide *depois* de conhecer a decisão da Inovadora, o que é significativamente diferente da situação dos dois bancos no exemplo anterior.

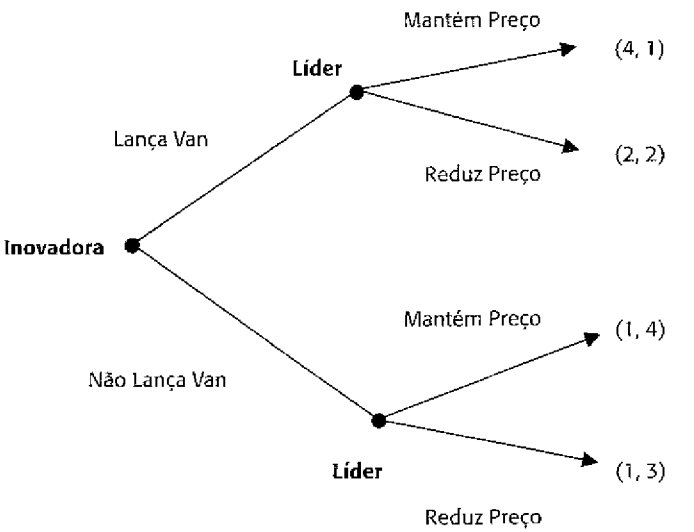


Figura 2.2 Jogo Sequencial na Forma Estendida

Para representar esse tipo de situação utiliza-se uma árvore de jogos, do gênero da que vimos anteriormente. Uma árvore de jogos é composta por *ramos* e *nós*.

Cada *nó* representa uma etapa do jogo em que um dos jogadores tem de tomar uma decisão. Já um *ramo* representa uma escolha possível para o jogador, a partir do seu nó, isto é, um ramo é uma ação do conjunto de ações do jogador, em um dado nó. Ramos podem ser representados com flechas para facilitar o entendimento de como o jogo se desdobra.

À medida que alcançamos um determinado nó no jogo, outros nós se tornam possíveis. Em outras palavras, determinadas escolhas de um jogador, em uma dada etapa do jogo, tornam possíveis outras escolhas dos demais jogadores nas etapas seguintes, assim como, muitas vezes, outras escolhas do mesmo jogador no futuro.

Esse fato leva a teoria dos jogos a se referir a um nó como o *sucessor* de um dado nó, significando com isso que o nó sucessor é uma escolha provável no futuro, caso o nó em questão seja alcançado no jogo. Inversamente, um nó *predecessor* de outro nó é aquele que tem de ser alcançado para que este último se torne possível.

Todavia, como o jogo tem de ter um início, há também o *nó inicial*, isto é, aquele que não tem predecessor. Finalmente, os *nós terminais* ou *finais* são aqueles que não possuem nós sucessores, em que são apresentadas as recompensas dos jogadores, expressas por números, na ordem em que os jogadores entram no jogo.

Vejamos como essas noções se aplicam à forma estendida da Figura 2.2. Lendo da esquerda para a direita a árvore de jogos que caracteriza um jogo sequencial em forma estendida (o sentido indicado pelas flechas), a Inovadora é o jogador a fazer o primeiro movimento, como podemos deduzir do fato de que o nó inicial pertence à inovadora.

Dois ramos saem do nó inicial: um ramo que representa a decisão de lançar a van, outro ramo que representa a decisão de não lançar a van. O ramo que representa a decisão de lançar a van termina em um nó que pertence à Líder, o que significa que é a vez da Líder jogar: ela toma a sua decisão *depois* da Inovadora ter decidido lançar a van, uma vez que o nó que pertence à Líder é sucessor do nó em que a Inovadora decide entre lançar ou não a van.

Ou, de forma equivalente, como o nó que pertence à inovadora é predecessor do nó em que a Líder decide se vai reduzir ou manter o preço, sabemos que a Líder toma sua decisão já conhecendo a decisão da Inovadora.

Do nó da Líder partem dois ramos, representando suas duas decisões possíveis: reduzir ou manter o preço. Esses ramos alcançam os nós terminais com as recompensas de cada jogador, indicando que depois da Líder fazer a sua escolha o jogo acaba, e cada jogador recebe sua recompensa: caso a Inovadora tenha decidido lançar a van e a Líder escolha reduzir o preço, tanto a Inovadora como a Líder têm um lucro de 2 milhões de reais.

Se, nas mesmas circunstâncias, a Líder decide manter o preço de sua van, a Inovadora obtém um lucro de 4 milhões, e a Líder obtém um lucro de 1 milhão. O mesmo raciocínio se aplicaria caso tivéssemos acompanhado o outro ramo que parte do nó inicial da Inovadora, e que corresponde à escolha de não lançar a van.

A forma estendida, ao utilizar a árvore de jogos, permite representar processos de interação estratégica que se desenrolam em etapas sucessivas. Por isso, a forma estendida é uma forma conveniente de modelar os chamados jogos *sequenciais*:

Um *jogo sequencial* é aquele em que os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem predeterminada.

Como o leitor já deve ter percebido, modelar um jogo em forma estendida é mais complexo do que em forma estratégica. Isso não deve surpreender, uma vez que o jogo na forma estendida nos oferece mais informações do que o jogo na forma estratégica, já que o primeiro nos informa como a interação se processa *sucessivamente*.

A modelagem de uma situação de interação estratégica em forma estendida por intermédio de uma árvore de jogos, desse modo, possui algumas regras, essenciais para que sejam preservadas a coerência e a inteligibilidade do modelo, assim como para permitir que o jogo seja analisado de forma inequívoca, e que passamos a considerar agora.

As Regras da Árvore de Jogos:

(a) Todo nó deve ser precedido por, no máximo, um outro nó apenas.
(b) Nenhuma trajetória pode ligar um nó a ele mesmo.
(c) Todo nó na árvore de jogos deve ser sucessor de um único e mesmo nó inicial.

Vejamos cada uma dessas regras separadamente. Inicialmente considere a regra (a), que afirma que um nó deve ser precedido por, no máximo, um outro

nó. No caso dos nós iniciais vemos que isso é imediatamente verdadeiro, pois eles não são precedidos por nenhum outro nó. Mas, e quanto aos demais nós? Para compreender o sentido da regra (a), observe a Figura 2.3 (a) (as flechas tracejadas indicam que o jogo prossegue além das etapas representadas):

A Figura 2.3 (a) representa uma trajetória em uma hipotética árvore de jogos, na qual a primeira regra da construção de diagramas em árvore é violada: o segundo nó pertencente ao jogador A (A_2) é antecedido por *dois* nós do jogador B (assinalados como B_1 e B_2). O que isso significa exatamente? Significa que uma vez que o jogador A tenha alcançado A_1, não importa o que escolha o jogador B (B_1 ou B_2), o jogador A sempre alcançará A_2. Não há motivo, portanto, para considerar a escolha de B por B_1 ou B_2, uma vez que essa escolha não afeta o desenvolvimento do jogo: essa etapa não deve ser representada na árvore de jogos.

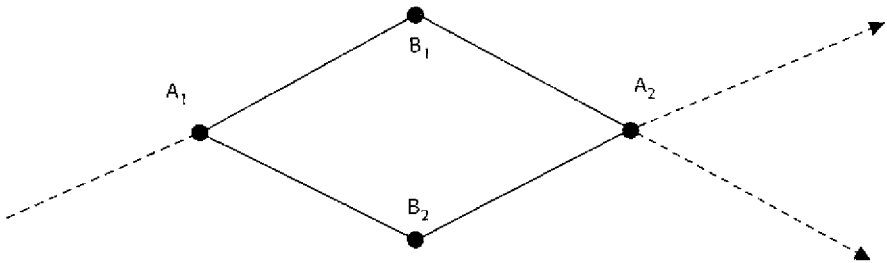


Figura 2.3 (a) Violando a Regra (a) da Árvore de Jogos

A Figura 2.3 (b) mostra o problema que podemos vir a enfrentar se a segunda regra de construção de uma árvore de jogos for violada: o próprio objetivo da forma estendida, que é permitir a análise de processos dinâmicos de interação, ao retratar a sucessão de etapas em que os jogadores tomam suas decisões, fica comprometido.

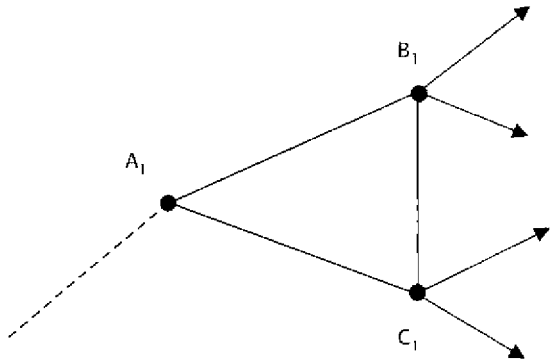


Figura 2.3 (b) Violando a Regra (b) da Árvore de Jogos

Com efeito, ao examinarmos o caso da Figura 2.3 (b) não temos como identificar qual nó é sucessor de qual entre os três nós A_1, B_1 e C_1 e, desse modo, não sabemos quem move primeiro, se o jogador A, B ou C. Devemos então evitar *loopings* ao descrever um jogo na forma estendida por meio de uma árvore de jogos.

Finalmente, a Figura 2.3 (c) representa uma situação em que há *dois* nós iniciais distintos pertencentes ao jogador A – A_1 e A_2 –, o que viola a regra (c) de construção do diagrama em árvore. Esses nós iniciais conduzem a diferentes nós pertencentes ao jogador B: A_1 precede B_1 e B_3, A_2 precede B_2 e B_4. Em outras palavras, o jogador B terá diferentes oportunidades de escolha dependendo do nó em que o jogo se inicie:

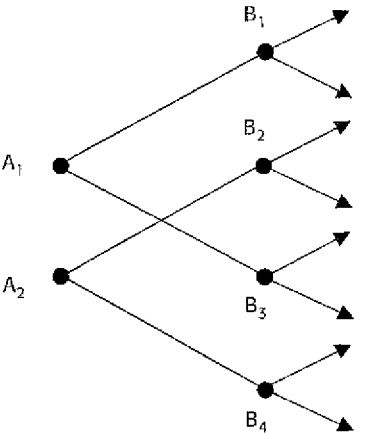


Figura 2.3 (c) Violando a Regra (c) da Árvore de Jogos

No caso da Figura 2.3 (c) não temos como saber em qual nó o jogo efetivamente irá se iniciar e, portanto, não temos como analisar o jogo (o leitor deve notar que estamos omitindo na Figura 2.3 (c) as recompensas, para simplificar). Uma saída possível é separar a trajetória que se inicia em A_1 da trajetória que se inicia em A_2, e tratá-las como dois jogos distintos: é fácil ver que essas duas trajetórias, quando consideradas isoladamente, respeitam as regras de construção do diagrama em árvore.

Uma outra solução possível é estabelecer uma distribuição de probabilidades de que o jogo se inicie em A_1 ou A_2. Isso significaria, na prática, supor que há uma probabilidade p de que o jogo se inicie em A_1, e uma probabilidade $(1 - p)$ de que o jogo se inicie em A_2. Por exemplo, podemos acreditar que, por algum motivo, há 60% de chances de que o jogo se inicie em A_1 e 40% de chances de que o jogo se inicie em A_2.

Teremos oportunidade de estudar esse tipo de situação mais detalhadamente ao estudarmos jogos de informação incompleta. Seja como for, as situações representadas nas Figuras 2.3 (a), 2.3 (b) e 2.3 (c) devem ser evitadas sempre que formos representar um jogo na forma estendida por meio de uma árvore de jogos.

Estratégias e Conjuntos de Informação

Estamos agora em condições de discutir as escolhas que os jogadores podem fazer em um jogo. Para fazer isso, temos de considerar nossa hipótese inicial de que os jogadores são racionais. Sendo racionais, os agentes envolvidos no processo de interação estratégica não decidem considerando apenas a etapa em que se encontram, *mas também todo o desenvolvimento do processo de interação até ali e suas consequências futuras*. O estudo acerca de como os jogadores podem, ou devem, interagir estrategicamente exige, portanto, que analisemos as *estratégias* dos jogadores:

Uma *estratégia* é um plano de ações que especifica, para um determinado jogador, que ação tomar em *todos os momentos* em que ele terá de decidir o que fazer.

Chamamos de *conjunto de estratégias*, ou *espaço de estratégias*, o conjunto de estratégias de que cada jogador dispõe. De uma forma genérica, se chamarmos s_j^i a *j-ésima* estratégia do jogador i, o *conjunto de estratégias ou espaço de estratégias* do jogador i é dado por:

$$S^i = \left\{ s_j^i \right\}$$

Um elemento importante de análise de um jogo é a combinação de estratégias que os jogadores podem adotar. A forma de representar uma *combinação de estratégias* S qualquer é por meio de um conjunto ordenado,[5] no qual cada elemento é uma estratégia para cada um dos n jogadores, na forma:

$$S = (s^1, \ldots, s^n)$$

---

5 Conjuntos ordenados são aqueles em que existe uma regra definindo como seus elementos devem ser listados. Aqui a regra é dada pela correspondência entre a ordem em que a estratégia é listada e o índice atribuído ao jogador. Por exemplo, a terceira estratégia corresponde à estratégia adotada pelo terceiro jogador.

Na fórmula anterior, s^1 é uma dada estratégia do jogador número 1, s^2 é uma dada estratégia do jogador número 2, e assim por diante, até o *n-ésimo* jogador.

Como tivemos a oportunidade de ver, ao discutir o jogo dos bancos e das empresas automobilísticas, cada combinação de estratégias produz recompensas diferentes para os jogadores. Podemos formalizar um pouco mais essa ideia por intermédio de uma *função de recompensa* de um jogador *i*, na forma:

$$U^i = (s^1, ..., s^i, ..., s^n)$$

Denotando a recompensa que o jogador *i* recebe quando o jogador 1 adota a estratégia s^1, o jogador 2 adota a estratégia s^2 etc., até o *n-ésimo* jogador, incluindo o fato de que o próprio jogador *i* adota uma dada estratégia s^i.

No caso de um jogo simultâneo, a estratégia de cada jogador coincide com as ações de que dispõe, uma vez que os jogadores fazem suas escolhas em um único momento. Retornando ao jogo simultâneo da Figura 2.1, o conjunto de estratégias para qualquer um dos dois bancos seria dado por {Renova, Não Renova}.[6]

Contudo, em jogos sequenciais os jogadores são capazes de, em algum momento, fazer suas escolhas conhecendo as ações dos demais em etapas anteriores do jogo. No exemplo da Figura 2.2, a Líder decide o que fazer após a Inovadora ter decidido se lança ou não sua van. Nesse caso, seguindo nossa definição de estratégia, as estratégias que comporiam o espaço de estratégias da Líder seriam:

- Mantém o Preço se a Inovadora Lança a Van, Reduz o Preço se a Inovadora Não Lança a Van.
- Reduz o Preço se a Inovadora Lança a Van, Mantém o Preço se a Inovadora Não Lança a Van.
- Mantém o Preço se a Inovadora Lança a Van, Mantém o Preço se a Inovadora Não Lança a Van.
- Reduz o Preço se a Inovadora Lança a Van, Reduz o Preço se a Inovadora Não Lança a Van.

Note que cada estratégia da Líder define antecipadamente o que ela irá fazer de acordo com cada possível escolha da Inovadora, uma vez que a Líder decide

6 Nesse caso, o fato de que os conjuntos de estratégias dos dois jogadores são compostos pelos mesmos elementos é mera coincidência, não sendo uma propriedade dos jogos simultâneos.

depois da Inovadora. Assim, a primeira estratégia especifica que caso a Inovadora decida lançar sua van, a Líder manterá o preço do seu produto e caso a Inovadora decida não lançar a van, a Líder reduzirá o preço de sua própria van.

No caso da Inovadora, como ela decide antes da Líder, sem nenhuma decisão anterior para considerar, seu espaço de estratégias coincide com o seu conjunto de ações: {Lança a Van, Não Lança a Van}. Essa diferença no espaço de estratégias da Líder, quando comparado ao espaço de estratégias dos jogadores na forma estratégica, pode ser entendida como um resultado da diferença nas *informações* da Líder.

Essa diferença nas informações da líder resulta do fato de que, enquanto jogadores em jogos simultâneos decidem sem saber qual foi a decisão dos demais jogadores (confira o exemplo dos bancos), no jogo sequencial estamos supondo que a Líder decide o que fazer em relação ao preço de sua van *sabendo* o que a Inovadora decidiu. Isso nos leva a uma conclusão muito importante: ao modelar um jogo, a opção entre um jogo simultâneo ou um jogo sequencial deve estar baseada nas *informações* de que os jogadores dispõem sobre as decisões dos demais.

Em outras palavras, se em um processo de interação estratégica os jogadores decidem em momentos diferentes no tempo, porém o jogador que decide em cada etapa não tem como saber aquilo que foi decidido nas etapas anteriores, a melhor forma de representar esse jogo é como um jogo simultâneo, não obstante o fato de que os jogadores estão tomando suas decisões em momentos diferentes!

Com efeito, a noção de tempo em jogos sequenciais tem um sentido muito mais *lógico* do que cronológico. Se pensarmos em termos estritamente físicos, dificilmente dois jogadores decidem exatamente ao mesmo tempo: empresas, organizações e indivíduos têm, cada um, seu momento para fazer escolhas e é improvável que esses momentos coincidam exatamente no tempo.

Desse modo, se fosse o critério cronológico o critério utilizado para optar pelo jogo simultâneo ao modelar uma situação de interação estratégica, raras seriam as vezes em que esse tipo de modelagem seria útil.

Contudo, muitas vezes os jogadores são obrigados a decidir sem a chance de observar antes o que os demais escolheram fazer. Nesses casos um jogo simultâneo representa uma forma adequada de representar o processo de interação estratégica. Assim, a opção por tratar um processo de interação como um jogo simultâneo, ou como um jogo sequencial, deve basear-se nas informações de que os jogadores dispõem no momento de escolher entre suas ações e não na distribuição de suas ações no tempo.

Mas como podemos representar o "quanto" um jogador sabe acerca das decisões dos demais? Quanto *mais* informação um jogador possui, melhor ele consegue *distinguir* em que circunstâncias do jogo está fazendo as suas escolhas. Quanto menos informação tem, menos ele consegue distinguir em que circunstâncias do jogo está sendo obrigado a tomar decisões.

Consideremos assim, inicialmente, o jogo da Figura 2.1. O que vemos é que, nesse caso, nenhum dos dois jogadores consegue distinguir em que circunstâncias estão tomando suas decisões: nenhum dos dois bancos sabe se o outro decidiu recuperar ou não seu empréstimo no momento em que tem de decidir se vai ou não renovar o seu próprio. Nenhum dos dois jogadores sabe com exatidão em que circunstâncias está tomando suas decisões.

Se formos analisar agora o jogo da Figura 2.2, perceberemos uma diferença importante: nesse caso, a Líder *sabe* o que a Inovadora decidiu no momento em que escolhe entre manter o preço de sua van ou reduzi-lo. Nesse caso a Líder pode discernir em que circunstâncias está tomando sua decisão: se em um mercado com uma van concorrente sendo produzida pela Inovadora, ou se em um mercado no qual sua van é a única a ser oferecida.

Isso significa que a Líder sabe em qual dos dois nós que lhe pertencem ela se encontra no momento em que decide o que fazer com seu preço, ou, em termos mais técnicos, cada um dos nós da Líder na Figura 2.2 constitui um *conjunto de informação* distinto:

Um *conjunto de informação* é um conjunto constituído pelos nós que o jogador acredita poder ter alcançado em uma dada etapa do jogo, quando é sua vez de jogar.

Quando um jogador tem certeza de que, uma vez alcançada uma dada etapa do jogo, ele somente poderá estar em um único determinado nó, diz-se que o seu conjunto de informação nessa etapa é um conjunto unitário, que tem como único elemento aquele nó que o jogador supõe ter alcançado.

Caso contrário, isto é, caso alcançada uma determinada etapa do jogo, o jogador que está na vez de jogar não pode estar certo quanto ao nó que alcançou, ou seja, esse jogador não pode saber o que o jogador que decidiu antes escolheu, o conjunto de informação do jogador que joga nessa etapa do jogo conterá todos os nós que ele considerar possíveis de serem alcançados naquela etapa.

Vejamos o exemplo da Figura 2.4 (a):

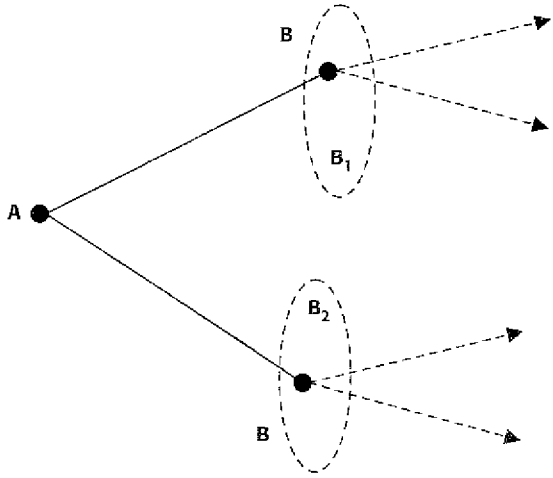


Figura 2.4 (a) Conjuntos de Informação Unitários em Jogo na Forma Estendida

A Figura 2.4 (a) mostra um exemplo em que o jogador B apresenta dois conjuntos de informação unitários, B_1 e B_2, na segunda rodada do jogo (as flechas pontilhadas, como sempre, significam que o jogo prossegue depois de B jogar). Cada um desses conjuntos possui apenas um nó, o que significa que o jogador B *sabe* qual foi a escolha do jogador A antes de tomar sua decisão.

Mas poderia acontecer de o jogador B ser obrigado a jogar *sem saber* o que o jogador A escolheu. Considere a Figura 2.4 (b):

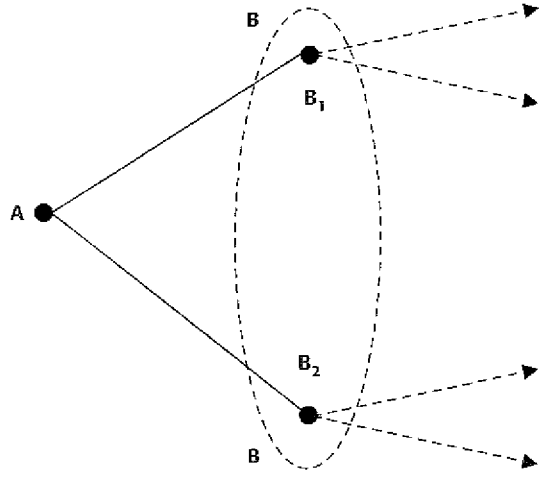


Figura 2.4 (b) Conjuntos de Informação Não-unitários em Jogo na Forma Estendida

Na Figura 2.4 (b), na etapa em que o jogador B é chamado a jogar pela primeira vez, ele não sabe em que nó se encontra, se no nó B_1 ou no nó B_2: seu conjunto

de informação possui, nessa etapa do jogo, dois elementos – $\{B_1, B_2\}$ –, uma vez que ele acredita que pode estar em qualquer um desses nós. Isso significa que, quando o jogador B é chamado a decidir, *ele não conhece a história do jogo* até ali: não sabe qual foi a escolha do jogador A no primeiro movimento.

Isso nos leva a uma primeira e importante classificação dos processos de interação estratégica, em relação às informações de que os jogadores dispõem:

Um jogo é dito de *informação perfeita* quando *todos* os jogadores conhecem *toda* a história do jogo antes de fazerem suas escolhas. Se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali, o jogo é dito de *informação imperfeita*.

Um modo mais formal de definir um jogo de informação perfeita é dizer que *todos os seus conjuntos de informação são unitários*, enquanto no jogo de informação imperfeita pelo menos um de seus conjuntos de informação *não* é unitário. Assim, para classificar um determinado modelo de interação estratégica, isto é, um jogo, como de informação perfeita ou imperfeita, tudo o que se tem de fazer é investigar todos os seus conjuntos de informação, verificando se algum deles não é unitário.

Vimos que para construir uma árvore de jogos, algumas regras têm de ser respeitadas. Da mesma forma, a definição dos conjuntos de informação deve respeitar alguns critérios. O primeiro critério é ilustrado pela Figura 2.5 (a) a seguir:

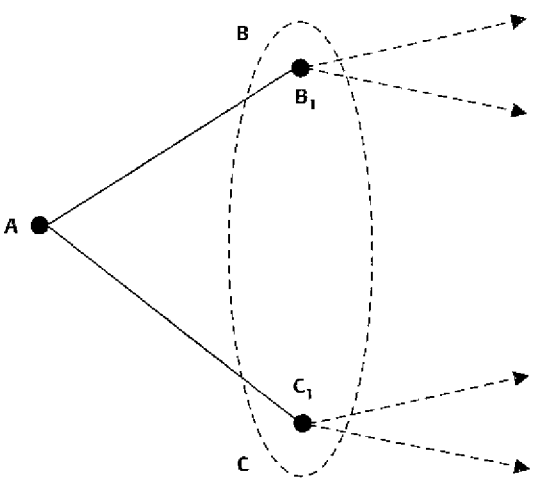


Figura 2.5 (a) Conjuntos de Informação Não Podem Conter Nós que Pertençam a Jogadores Diferentes

A Figura 2.5 (a) acima ilustra um tipo de situação que **não** pode ocorrer. Nela, vemos em um mesmo conjunto de informação nós que pertencem ao jogador B (B_1) e ao jogador C (C_1). A razão para isso é trivial: na segunda etapa do jogo, o jogador B sabe que não pode jogar em C_1, uma vez que o nó não lhe pertence.

Da mesma forma, o jogador C sabe que não é sua vez de jogar em B_1. Assim, não há a possibilidade de um conjunto de informação conter nós que pertencem a jogadores diferentes.

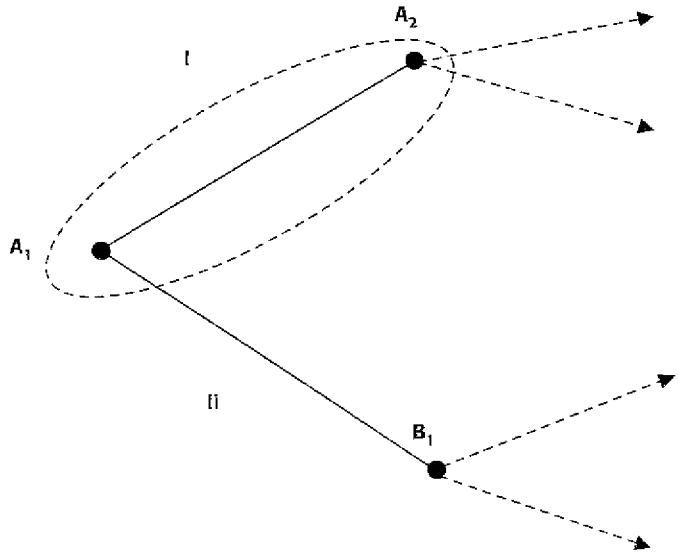


Figura 2.5 (b) Conjuntos de Informação Não Podem Conter Nós em sequência

A Figura 2.5 (b) ilustra outro tipo de situação que **não** pode ocorrer ao definirmos conjuntos de informação: eles não podem conter nós em sequência. Na Figura 2.5 (b) o conjunto de informação assinalado une dois nós em sequência do jogador A: A_1 e A_2 (e um conjunto de informação para o jogador B, contendo apenas o nó B_1). Mas um conjunto de informação unindo dois nós em sequência de um jogador não faz sentido.

O nó A_2 somente pode ser alcançado se o jogador A escolher a ação I em seu primeiro movimento (A_1). Como o jogador A conhece suas próprias escolhas e a árvore de jogos, ele sabe se já realizou seu primeiro movimento, e qual foi sua opção. Ele sabe, portanto, se o nó A_2 foi alcançado ou se ele ainda se encontra em A_1: não há razão para supor que ele não consegue distinguir entre A_1 e A_2.

Finalmente, a Figura 2.5 (c) abaixo ilustra um terceiro critério a ser respeitado na definição de conjuntos de informação: os nós que compõem um mesmo

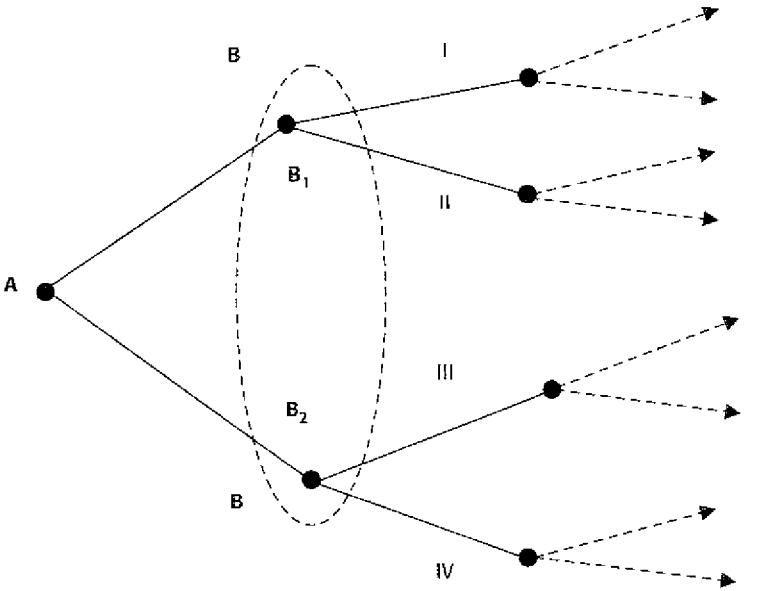


Figura 2.5 (c) Os Nós de um Conjunto de Informação Não Podem Apresentar Diferentes Conjuntos de Ação

conjunto de informação **não** podem apresentar diferentes conjuntos de ação ao jogador.

Na Figura 2.5 (c) vemos porque os nós pertencentes a um mesmo conjunto de informações não podem oferecer conjuntos diferentes de ações aos jogadores. No caso em questão, o nó B_1 oferece ao jogador B as ações alternativas I e II, enquanto o nó B_2 oferece ao mesmo jogador B as ações III e IV. Faz sentido supor que o jogador B não consegue distinguir entre eles, como indica o conjunto de informação assinalado?

Para entender por que a resposta é negativa, o leitor deve se colocar na situação do jogador B: pela simples inspeção das ações de que dispõe, o jogador B é capaz de determinar em qual dos dois nós ele se encontra! Caso as ações à sua disposição sejam I e II, o jogador B vai perceber que a escolha do jogador A fez com que ele se encontre no nó B_1. Se as ações de que B dispõe são III e IV, ele perceberá que se encontra no nó B_2. Não há sentido em construir um conjunto de informação contendo B_1 e B_2.

Até aqui discutimos jogos simultâneos utilizando a forma estratégica e jogos sequenciais usando a forma estendida. Contudo, é importante que o leitor perceba que nem jogo simultâneo é sinônimo de forma estratégica, nem tampouco jogo sequencial é sinônimo de forma estendida. Em outras palavras, tanto podemos apresentar jogos simultâneos na forma estendida, como podemos descrever um jogo sequencial por meio da forma estratégica.

A opção entre uma dessas formas, a forma estendida ou a forma estratégica, para representar um jogo, irá depender da clareza com que cada uma representa um determinado tipo de jogo. Esse será nosso próximo assunto.

Forma Estratégica *versus* Forma Estendida

Vimos que a forma mais simples e prática de representar uma situação de interação estratégica que pode ser analisada por meio de um jogo simultâneo, em geral, é por meio de uma forma estratégica, também conhecida como forma normal. Também vimos que a forma mais prática de representar uma situação de interação estratégica que pode ser descrita como um jogo sequencial é a forma estendida.

Agora é o momento de mostrarmos que isso não é uma regra rígida, porque também podemos representar jogos simultâneos na forma estendida, e jogos sequenciais na forma normal. Vamos começar discutindo a representação de jogos simultâneos na forma estendida, uma vez que isso envolve a aplicação do conceito de conjunto de informação.

a) Apresentando um Jogo Simultâneo em Forma Estendida

Vamos apresentar o jogo simultâneo dos dois bancos, descrito na Figura 2.1, em forma estendida. Para isso precisamos considerar que o que caracteriza um jogo como um jogo simultâneo é o fato de que os jogadores fazem suas escolhas desconhecendo as escolhas dos demais. Isso significa que o conjunto de informação desse jogador não é unitário: ele não sabe exatamente em que nó se encontra, pois não conhece a escolha do jogador que o antecedeu.

Portanto, a forma de representar um jogo simultâneo na forma estendida é assinalar conjuntos de informação que representem o fato de que os jogadores estão decidindo sem conhecer as decisões dos demais jogadores que antecederam suas escolhas. A Figura 2.6 reapresenta o jogo dos dois bancos descrito na Figura 2.1, agora em forma estendida:

Na Figura 2.6 vemos que o fato de o Banco B não conhecer a decisão do Banco A é representado por um conjunto de informação contendo os dois nós que pertencem ao Banco B. Assim, é fácil observar da Figura 2.6 que *ambos* os jogadores estão decidindo sem conhecer a escolha do outro: o Banco A decide sem conhecer a escolha do Banco B simplesmente porque ele faz sua escolha *antes* na árvore do jogo.

O Banco B, por sua vez, possui *todos* os nós da sua vez de jogar em um mesmo conjunto de informação, o que significa que ele também não sabe qual foi a escolha do Banco A. Podemos representar assim o jogo simultâneo da Figura 2.1 em

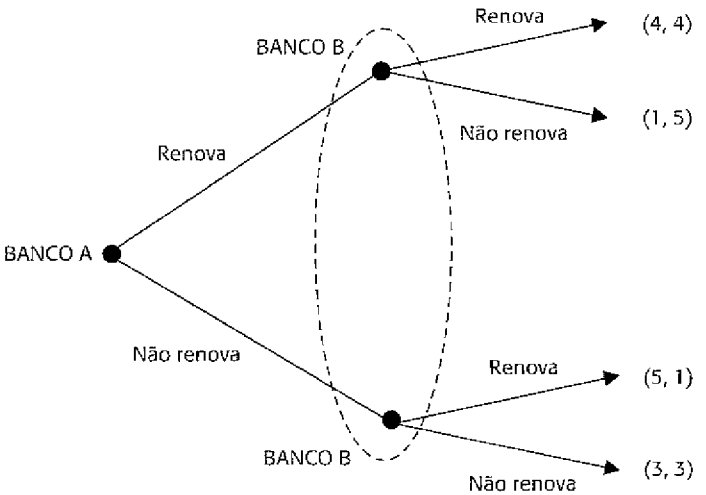


Figura 2.6 O Jogo Simultâneo da Figura 2.1 na Forma Estendida

forma estendida, respeitando a condição de que os jogadores façam suas escolhas ignorando as decisões dos demais.

O leitor deve observar que, ao representarmos um jogo simultâneo na forma estendida, a ordem em que os jogadores jogam se torna irrelevante. Na Figura 2.6 tanto faz construirmos a árvore do jogo com o Banco A fazendo o primeiro movimento, como fizemos, ou com o Banco B escolhendo primeiro. Como o segundo jogador sempre terá seus dois nós em um mesmo conjunto de informação, a definição de quem move primeiro, nesse caso, se torna irrelevante.[7]

Também é interessante observar que, em jogos simultâneos com vários jogadores, dadas as dificuldades de representação utilizando a tabela que carateriza a forma estratégica, a forma estendida pode se tornar a mais conveniente. Por exemplo, um jogo simultâneo com três jogadores exigiria três dimensões para sua representação: linhas, colunas e páginas.

No caso de quatro jogadores, uma quarta dimensão teria de ser adicionada às três primeiras, e assim por diante, ao passo que tudo que teríamos de fazer na forma estendida seria ampliar o tamanho da árvore, unindo os nós dos jogadores em conjuntos de informação.

Vimos então como podemos representar jogos simultâneos em forma estendida. Vejamos agora como podemos representar um jogo sequencial na forma estratégica.

---

7 Recomendamos ao leitor que, como exercício, refaça a Figura 2.6, dessa vez com o Banco B fazendo o primeiro movimento, para visualizar o que estamos afirmando.

b) Apresentando um Jogo Sequencial em Forma Estratégica

Vamos iniciar representando um jogo sequencial muito simples na forma estratégica. Para isso, suponha a seguinte situação: uma empresa planeja ingressar em um mercado que é monopolizado por uma outra empresa já estabelecida, que chamaremos de empresa *Dominante*. A empresa que planeja ingressar no mercado, chamaremos de *Desafiante*.

A Desafiante possui apenas duas ações possíveis, das quais ela deve escolher uma: entrar no mercado (que corresponde à ação {Entra}) ou não entrar no mercado (que corresponde à ação {Não Entra}). Uma vez que a Desafiante tenha decidido entrar, é a vez da empresa Dominante decidir entre duas ações possíveis: {Luta} ou {Acomoda}.

Lutar, no jargão dos estudos de organização industrial, significa adotar guerras de preços, campanhas agressivas de marketing etc., de modo que a participação da empresa Dominante no mercado não sofra redução significativa e assim impeça que a Desafiante consiga obter um volume de vendas suficiente, que assegure retorno adequado sobre seus investimentos.

O problema é que a opção de lutar envolve um custo significativo também para quem decide lutar: a empresa que decide lutar vê sua margem de lucro ser reduzida pela guerra de preços ou pelo aumento de custos derivados das maiores despesas de publicidade e comercialização dos produtos.

A opção alternativa da Dominante é acomodar. Acomodar, para a Dominante, significa reduzir sua própria produção, de forma a abrir espaço para a entrada da Desafiante no mercado, na tentativa de impedir que o preço do mercado se reduza substancialmente, em função da adição da nova oferta da Desafiante à oferta total.

O aspecto importante a ser considerado nesse jogo é que a empresa Dominante decide o que fazer (lutar ou acomodar) *já conhecendo* a decisão da Desafiante quanto a entrar ou não no seu mercado. Isso significa que a empresa Dominante toma sua decisão levando em conta a informação acerca da decisão da Desafiante.

Considere a representação na forma estendida do jogo da entrada na Figura 2.7. Na Figura, vemos as recompensas de cada jogador para cada combinação de estratégias, expressas nos lucros de cada empresa para cada situação. Assim, caso a empresa Desafiante decida não entrar, seu lucro é zero, enquanto o lucro da Dominante é máximo (no valor de, digamos, 10 milhões).

Já no caso da Desafiante decidir entrar no mercado, se a Dominante decidir lutar, o lucro da Desafiante se transforma em um prejuízo de 1 milhão (recompensa de –1), pois a guerra de preços e as despesas de comercialização impe-

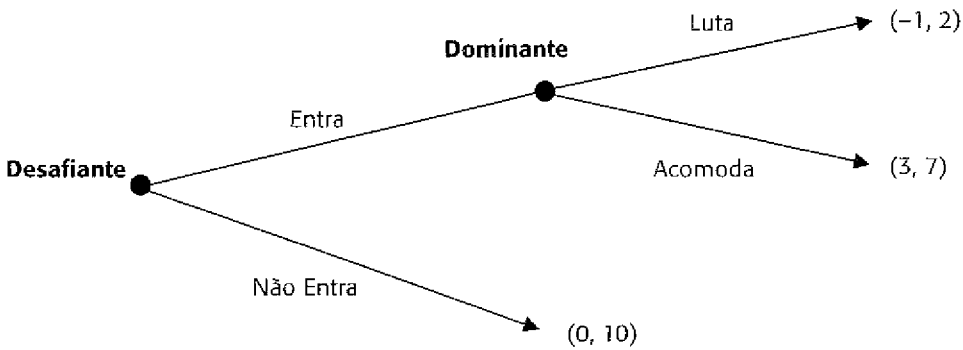


Figura 2.7 O Jogo da Entrada

dem que a desafiante consiga obter um retorno adequado sobre os investimentos que fez para ingressar no mercado. Os lucros da Dominante, contudo, também se reduzem significativamente, para 2 milhões, pois, conforme vimos, essa opção estratégica também possui um custo para ela.

Por último, se a Dominante acomoda a entrada da Desafiante, não lutando, os lucros da Desafiante são positivos, no valor de 3 milhões, enquanto os lucros da Dominante também se tornam maiores do que na hipótese em que a Dominante lute (7 milhões), embora não tão elevados como seriam no caso em que a Desafiante não entrasse no mercado.

Vejamos como é possível representar esse jogo na forma estratégica. Ao estabelecer sua estratégia, a Desafiante deve especificar qual será a ação adotada em cada momento do jogo em que possa vir a ter que tomar alguma decisão. Há apenas um momento em que a desafiante tem de tomar alguma decisão: o início do jogo. Assim, cada estratégia da desafiante tem apenas de especificar qual ação será adotada por ela na primeira etapa do jogo. Segue-se assim que as estratégias da Desafiante são: {Entra} e {Não Entra}.

Vejamos agora a situação da empresa Dominante. A Dominante também tem de decidir apenas qual de suas duas ações tomar, ou seja, se luta ou se acomoda, caso a Desafiante entre no mercado. Assim, há apenas uma circunstância em que a Dominante tem de fazer sua escolha, o que é indicado na forma estendida da Figura 2.7 pelo fato de que a Dominante faz a sua escolha em apenas um nó: aquele que se segue à escolha da Desafiante de entrar no mercado.

Desse modo, também para a Dominante, cada estratégia é composta apenas por uma das ações que a Dominante pode adotar caso a Desafiante decida ingressar no mercado em que a Dominante atua: {Luta} e {Acomoda}. Desse modo, a representação do jogo da Figura 2.7 acaba se tornando bastante simples, como se pode ver na Figura 2.8.

	Dominante	
Desafiante	**Luta**	**Acomoda**
Entra	−1, 2	3, 7
Não Entra	0, 10	0, 10

Figura 2.8 O Jogo da Entrada em Forma Estratégica

O leitor deve ter percebido uma peculiaridade da tradução da forma estendida de um jogo sequencial, com as características do jogo da Figura 2.7, na forma estratégica da Figura 2.8. A peculiaridade é o fato de que, apesar de a Dominante não jogar se a Desafiante decidir não entrar, como é indicado na Figura 2.7 pela circunstância de que o jogo termina imediatamente se a Desafiante decide não entrar, na forma estratégica da Figura 2.8 são atribuídas duas recompensas para a combinação de estratégias que correspondem a (Não Entra, Luta) e (Não Entra, Acomoda): ambas resultam em recompensas iguais a zero para a Desafiante e 10 para a Dominante.

O leitor pode estar se perguntando se a tradução de um jogo sequencial da forma estendida para a forma estratégica não resultaria em uma "distorção" da natureza do processo de interação estratégica, no qual seriam supostas interações que na prática não ocorreriam, como seria o caso se supuséssemos, pela observação exclusivamente da Figura 2.8, que existiria uma sequência de jogadas em que a Desafiante decide não entrar e, por isso, a Dominante decide lutar!

Na verdade não é bem assim. Se o leitor observar com cuidado a forma estratégica da Figura 2.8, verá que as recompensas se repetem quando a Desafiante decide não entrar, qualquer que seja a estratégia escolhida pela Dominante: lutar ou acomodar. Deduzimos assim, rapidamente, que não importa o que Dominante faça, a recompensa dos dois jogadores será sempre a mesma, uma vez que a Desafiante tenha decidido não entrar no mercado.

Desse modo, mesmo que não tivéssemos conhecimento da forma estendida da Figura 2.7, e tivéssemos conhecimento apenas da forma estratégica da Figura 2.8, concluiríamos que, dada a irrelevância das escolhas da Dominante caso a Desafiante decida não entrar, na verdade, a Dominante não joga caso a Desafiante escolha não entrar no mercado.

Vamos tornar a situação um pouco mais complexa. Considere, na Figura 2.9, a reprodução do jogo entre a Inovadora e a Líder, que vimos anteriormente na forma estendida da Figura 2.2, em forma estratégica. O leitor deve observar, inicialmente, que as estratégias da Líder retratadas na tabela da Figura 2.9 apresentam uma diferença significativa quando comparadas com a tabela da

Figura 2.1: em vez de apenas uma ação por coluna, agora temos *duas* ações em cada coluna que representa as estratégias da Líder.

Para entender por que isso ocorre, o leitor deve recordar a definição de estratégia que vimos anteriormente: uma estratégia de um jogador deve especificar qual será a ação adotada pelo jogador em questão em cada etapa do jogo em que ele possa vir a ter de tomar alguma decisão.

	Líder			
Inovadora	**Reduz Preço, Reduz Preço**	**Reduz Preço, Mantém Preço**	**Mantém Preço, Reduz Preço**	**Mantém Preço, Mantém Preço**
Lança Van	2, 2	2, 2	4, 1	4,1
Não Lança Van	1, 3	1, 4	1, 3	1, 4

Figura 2.9 O Jogo sequencial da Figura 2.2 na Forma Estratégica

Em um jogo simultâneo, a estratégia de um jogador se resume apenas a uma ação: como ele terá apenas uma oportunidade de jogar, quando deverá tomar sua decisão *sem saber o que o outro jogador decidiu*, tudo o que pode fazer é escolher uma das ações possíveis naquela etapa. Desse modo, os jogadores em um jogo simultâneo não têm como utilizar a informação acerca do que os demais fizeram para traçar um plano de ação: sendo obrigados a decidir o que fazer ignorando a decisão dos demais, basta, portanto, escolher uma única ação para definir uma estratégia.

Mas em um jogo sequencial a situação é diferente: *desde que seja um jogo de informação perfeita*, o jogador que toma uma decisão após outro jogador decide *já sabendo qual foi a ação do outro jogador*. Portanto, *sendo racional*, isto é, buscando de forma coerente atingir seus fins, o jogador que decide depois vai utilizar essa informação, a respeito do que foi jogado na etapa anterior do jogo, para tomar a melhor decisão *na sua vez de jogar*.

Dessa forma, cada jogador, ao chegar em uma etapa do jogo em que tem conhecimento do que foi feito na etapa anterior, tem que definir nas suas estratégias *uma ação para cada situação em que tenha de tomar uma decisão*, pois terá de tomar suas decisões em situações diferentes, de acordo com o que o jogador que o antecedeu tiver decidido.

É isso que vemos na Figura 2.9. Observe inicialmente as linhas: há escolhas entre *duas ações apenas*. Como a Inovadora escolhe o que fazer primeiro, há apenas um momento e uma circunstância em que a Inovadora é chamada a decidir: no início do jogo. Portanto, como no início do jogo a Inovadora dispõe

apenas de duas ações, cada linha da forma estratégica indica haver apenas uma escolha possível da Inovadora entre as duas ações.

Todavia, o caso da Líder é distinto do caso da Inovadora: na segunda etapa do jogo, quando é a vez da Líder de decidir, ela decide em *circunstâncias diferentes*, conforme o que tiver sido escolhido pela Inovadora na primeira etapa. Isso porque uma mesma decisão da Líder – por exemplo, a decisão de reduzir o preço de sua van – terá consequências diferentes, conforme a Inovadora tenha decidido lançar ou não o seu modelo de van. Desse modo, ao definir sua estratégia, a Líder precisa definir *uma ação para cada situação diferente em que ela tenha de decidir, em função da ação anterior da Inovadora*.

É exatamente isso que se encontra representado na forma estratégica da Figura 2.9. Observe a primeira coluna: ela define uma estratégia da Líder que é composta por duas ações iguais: "Reduz Preço". Isso significa que essa coluna descreve uma estratégia da Líder que deve ser lida como "caso a Inovadora lance sua van, reduzo o preço da minha van; caso a Inovadora não lance a sua van, reduzo o preço da minha van".

Já na segunda coluna, a estratégia "Reduz Preço, Mantém Preço" deve ser lida como "caso a Inovadora lance sua van, reduzo o preço da minha van; caso a Inovadora não lance sua van, mantenho o preço da minha van", e assim por diante, para as demais colunas da forma estratégica na Figura 2.9.

Desse modo, o primeiro elemento no par de ações que compõem as estratégias da Líder é uma resposta à ação retratada na primeira linha das estratégias da Inovadora, enquanto o segundo elemento desse mesmo par é a resposta da Líder à ação descrita na segunda linha das estratégias da Inovadora.

Outra particularidade que deve ter chamado a atenção do leitor é o fato de que as recompensas dos jogadores se repetem duas vezes na tabela. Para esclarecer por que isso acontece, considere a primeira linha na forma estratégica da Figura 2.9, que representa a estratégia "Lança Van" por parte da Inovadora, e as duas primeiras colunas da mesma Figura 2.9, que representam as duas estratégias "Reduz Preço, Reduz Preço" e "Reduz Preço, Mantém Preço" da Líder.

É fácil entender por que as recompensas se repetem: caso a Inovadora decida lançar sua van, o segundo elemento do par de ações que define a estratégia da Líder se torna *irrelevante* para determinar o resultado, uma vez que ele representa o que a Líder faria caso a Inovadora *não* lançasse a van, o que *não* aconteceu.

Uma vez que a Inovadora tenha lançado sua van, as estratégias da Líder que se diferenciem apenas no caso de a Inovadora *não* lançar a van não alteram as recompensas dos jogadores: o que vai realmente afetar o resultado é a ação que cada estratégia determina *caso a Inovadora lance sua van* e, nesse caso, as duas

estratégias representadas nas duas primeiras colunas *determinam a mesma coisa*: redução de preço. Por isso as recompensas são iguais.[8]

Embora possamos converter um jogo sequencial da forma estendida para a forma estratégica, a forma estendida é mais interessante como representação de jogos sequenciais, especialmente se forem jogos de informação perfeita: nela podemos visualizar imediatamente a sequência em que os jogadores fazem a suas escolhas, coisa que nem sempre é possível em jogos na forma estratégica, que podem se tornar complexos se há muitos jogadores fazendo suas jogadas sequencialmente.

Vistos assim os elementos fundamentais na modelagem de um jogo, temos agora de começar estudar como se analisa um jogo, isto é, como podemos determinar a melhor forma de os jogadores se comportarem, e que recompensas eles podem obter comportando-se assim. Para isso, no próximo capítulo, analisaremos jogos simultâneos de informação completa.

BOX 2.1

O Jogo é Simultâneo ou Sequencial?

O economista David J. Teece escreveu que:

> Na nova economia, a vantagem competitiva sustentável das empresas de negócios advém da criação, propriedade, proteção e uso de ativos de conhecimento, comerciais e industriais, difíceis de imitar. Tais ativos incluem know-how tácito e codificado, tanto técnicos como organizacionais, sejam ou não protegidos pelos instrumentos de propriedade intelectual, tais como segredos comerciais, copyrights e patentes. A vantagem competitiva oferecida por esses ativos pode ser sustentável na medida em que ela é transferível e utilizável no interior da empresa, mas difícil de ser acessada e/ou recriada por outsiders. "Strategies for Managing Knowledge Assets: the Role of Firm Structure and Industrial Context", *Long Range Planning*, vol. 33, 2000, pp. 35-54.)

Teece descreve o fato de que empresas, atuando em setores tecnologicamente dinâmicos, podem sustentar suas vantagens competitivas apenas na medida em que as inovações que introduzem não podem ser *copiadas com rapidez ou antecipadas*. Se essas inovações não podem ser copiadas ou antecipadas, a empresa inovadora se encontra em um jogo *sequencial*: ela introduz pioneiramente a inovação e às empresas concorrentes resta apenas atuar de forma reativa, reduzindo o preço de seus produtos, cortando custos, tentando acompanhar as inovações etc.

---

8 O leitor é convidado, como exercício, a desenvolver o mesmo raciocínio para as outras combinações de estratégias que possuem recompensas repetidas na Figura 2.7.

Contudo, se essas inovações podem ser copiadas ou, pior ainda, antecipadas, tanto a empresa inovadora quanto as concorrentes se encontram em um jogo *simultâneo*: as mesmas inovações podem ser introduzidas, praticamente ao mesmo tempo, por todos e todos sabem disso. Teece mostra que uma condição essencial da vantagem competitiva em um setor tecnologicamente dinâmico é a empresa inovadora conseguir se sustentar em um jogo sequencial, em que ela é a primeira a se mover.

EXERCÍCIOS

2.1 Seja um jogo qualquer, ao qual foram aplicadas as seguintes transformações às recompensas dos jogadores:

a. $f(r) = 3r - 17$
b. $f(r) = r^3$
c. $f(r) = r^2$
d. $f(r) = -2^{-r}$
e. $f(r) = -(1/r^2)$
f. $f(r) = \log(r)$

Onde r representa a recompensa do jogo original. Identifique, entre essas transformações, aquelas que não alteram o jogo original.

2.2 Considere uma transformação que, dadas duas recompensas r_1 e r_2 do jogador, obedece à seguinte condição:

$$\frac{f(r_2) - f(r_1)}{r_2 - r_1} > 0$$

Tal transformação é dita *monotônica* e possui a propriedade de não alterar as preferências do jogador. Verifique, para as transformações do Exercício 2.1, qual delas é monotônica.

2.3 Suponha uma situação de interação estratégica entre duas empresas, a empresa Vermelha e a empresa Azul. A empresa Azul está considerando a possibilidade de adquirir a empresa Vermelha, que vem apresentando baixa lucratividade, fazendo uma oferta aos acionistas da empresa Vermelha: R$ 1,00 por cada ação (a empresa Vermelha possui 1 milhão de ações no mercado), que valem hoje R$ 0,90 cada. Considere os seguintes fatos na sua modelagem:

- A empresa Azul acredita que, substituindo a administração da empresa Vermelha, conseguirá aumentar a lucratividade e revender as ações que adquiriu da empresa Vermelha por R$ 1,20, obtendo assim uma taxa de retorno de 20% sobre seu investimento (R$ 200.000,00).
- Os executivos da empresa Vermelha podem decidir tomar a "pílula envenenada" (do inglês, *poison pill*). No jargão de administração de empresas, tomar uma pílula envenena-

da significa adotar medidas administrativas que prejudicam a própria empresa (por exemplo, aumentando exageradamente os benefícios aos empregados), reduzindo seu valor no mercado.

- Se os executivos da empresa Vermelha não tomam a pílula envenenada e a empresa Azul compra a empresa Vermelha, a empresa Azul tem garantido seu lucro no valor de R$ 200.000,00 e os executivos da empresa Vermelha sofrem um prejuízo líquido em termos de perda de salários e benefícios no valor de R$ 50.000,00.
- Se os executivos da empresa Vermelha decidem tomar a pílula envenenada e a empresa Azul não tenta adquirir a empresa Vermelha, eles se desgastam com os acionistas e são demitidos, sofrendo a mesma perda de R$ 50.000,00, enquanto a empresa Azul não tem nenhum lucro.
- Se a empresa Azul compra a empresa Vermelha e os executivos desta última tomam a pílula envenenada, as mudanças realizadas pela empresa Azul apenas compensam os prejuízos da pílula envenenada e seus lucros são nulos, enquanto os executivos da empresa Vermelha são demitidos, sofrendo a mesma perda de R$ 50.000,00.
- Finalmente, se nem a empresa Azul tenta adquirir a empresa Vermelha nem os executivos desta última tomam a pílula envenenada, a empresa Azul não realiza nenhum lucro e os executivos da empresa Vermelha mantêm seus benefícios no valor de R$ 50.000,00.

Trata-se, então, de uma interação estratégica entre a empresa Azul e os executivos da empresa Vermelha. Pede-se:

a. Descrever as ações disponíveis para cada jogador (empresa Azul e executivos da empresa Vermelha).
b. Descrever os conjuntos que formam o espaço de estratégias da empresa Azul e dos executivos da empresa Vermelha, supondo que cada um dos dois jogadores escolhe suas ações sem conhecer as ações do outro.
c. Descrever os conjuntos que formam o espaço de estratégias da empresa Azul e dos executivos da empresa Vermelha, supondo que os executivos da empresa Vermelha escolhem suas ações conhecendo as ações da empresa Azul.
d. Representar a situação de interação estratégica entre os dois jogadores na forma estratégica, supondo que ambos tomam suas decisões sem conhecer as decisões do outro.
e. Representar a situação de interação estratégica entre os dois jogadores na forma estratégica, supondo que os executivos da empresa Vermelha tomam suas decisões conhecendo as ações da empresa Azul.
f. Representar a situação de interação estratégica entre os dois jogadores na forma estendida, supondo que os executivos da empresa Vermelha tomam suas decisões conhecendo as ações da empresa Azul.
g. Representar a situação de interação estratégica entre os dois jogadores na forma estendida, supondo que ambos tomam suas decisões sem conhecer as decisões do outro.

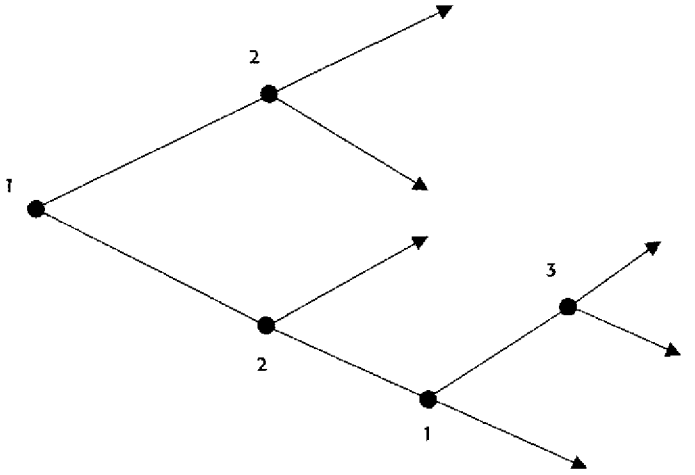
2.4 James D. Morrow, em seu livro *Game Theory for Political Scientists*, analisa a decisão do presidente norte-americano Richard M. Nixon de bombardear, no Natal de 1972, o então Vietnã do Norte. Vamos analisar aqui uma adaptação desse jogo. Após um acordo inicial acerca da retirada das tropas norte-americanas da guerra, houve uma discordância sobre a natureza do acordo. Considere as seguintes informações no momento de modelar a situação que se seguiu:

- Do ponto de vista dos Estados Unidos, o governo vietnamita estaria tentando obter concessões adicionais protelando a assinatura do acordo. Contudo, havia uma chance de que estivesse havendo realmente um mal-entendido. Os vietnamitas poderiam, ou não, estar blefando. Os norte-americanos, por sua vez, poderiam bombardear o Vietnã do Norte para forçar um acordo, ou não bombardear.
- Se os norte-vietnamitas estivessem blefando, o bombardeio os faria voltar à mesa de negociação, pois o custo do blefe se tornaria maior do que as vantagens que poderiam obter. Suponha que nesse caso a função de recompensa representando a preferência dos norte-americanos resulte em um valor de 1 (forçariam um acordo rápido) e para os norte-vietnamitas em um valor de −2 (sofreriam o ônus do bombardeio desnecessariamente).
- Se não estivessem blefando, o bombardeio seria interpretado como uma provocação e quebra de acordo, as negociações seriam abandonadas e a guerra recomeçaria. Com isso, os norte-americanos teriam uma perda de −3 (seriam obrigados a sustentar uma guerra impopular desnecessariamente) e os norte-vietnamitas receberiam uma recompensa de 0 (provariam que os norte-americanos não eram sinceros em sua busca pela paz, o que lhes renderia alguma propaganda mas prolongaria a guerra).
- Se os norte-americanos não bombardeassem e os norte-vietnamitas estivessem realmente blefando, os Estados Unidos seriam forçados a concessões desnecessárias (perda de −1) e os norte-vietnamitas estariam em melhor situação (ganho de 2).
- Se os norte-americanos não bombardeassem, mas não se tratasse de um blefe, haveria novas concessões por parte dos norte-americanos, mas não seriam significativas e a guerra terminaria mais rapidamente (o que lhes daria uma recompensa de 0), e os vietnamitas do norte sairiam um pouco melhor (recompensa de 1). Monte esse jogo:
  a. Na forma estratégica.
  b. Na forma estendida.

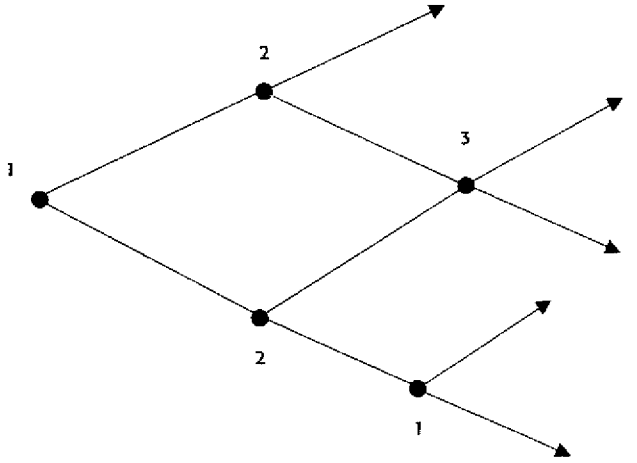
2.5 Suponha dois vendedores que vêem, simultaneamente, entrar um cliente em uma loja. Ambos estão perto do cliente. Se um deles aborda o cliente, ele marca um ponto na sua avaliação com o gerente da loja, o que pode lhe render uma promoção ao fim do mês, enquanto o outro que não abordou perde um ponto, pois não mostrou iniciativa, e muito provavelmente perde a promoção. Se nenhum dos dois aborda o cliente, nenhum deles marca pontos com o gerente. Mas se os dois abordam o cliente, ele fica irritado e vai embora, e cada um dos dois perde um ponto com o gerente. Modele esse jogo, supondo que nenhum dos dois tem tempo de perceber o que o outro irá fazer.

2.6 Assinale, dentre as árvores de jogos a seguir, contruídas para um jogo entre os jogadores 1, 2 e 3, quais violam alguma das condições de representação de um jogo na forma estendida, explicando qual condição foi violada em cada caso (as recompensas foram omitidas para simplificar):

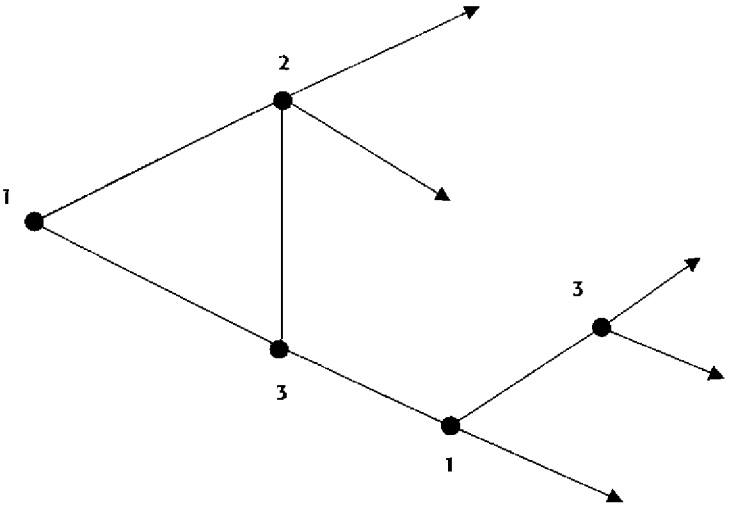
a.



b.

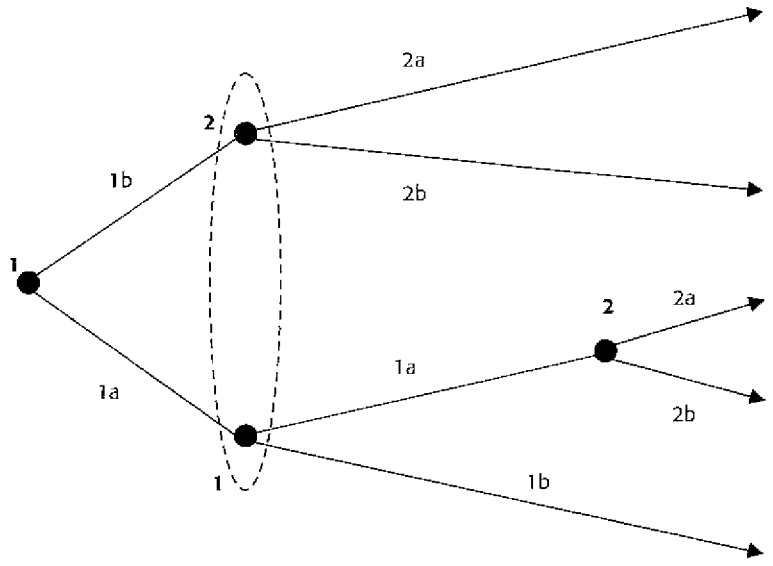


c.

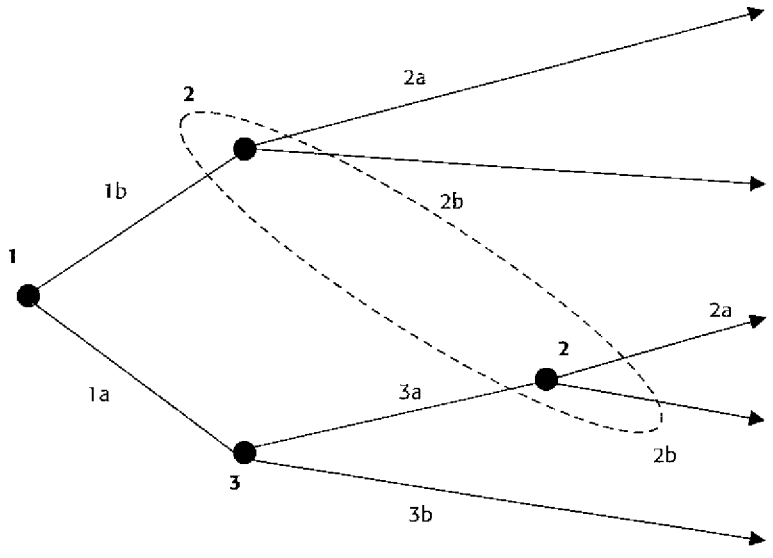


2.7 Indique, dentre os conjuntos de informação não-unitários a seguir, quais estão impropriamente construídos e novamente explique qual condição foi violada. Nesse caso, pode haver três jogadores – 1, 2 e 3 (as recompensas foram mais uma vez omitidas para simplificar).

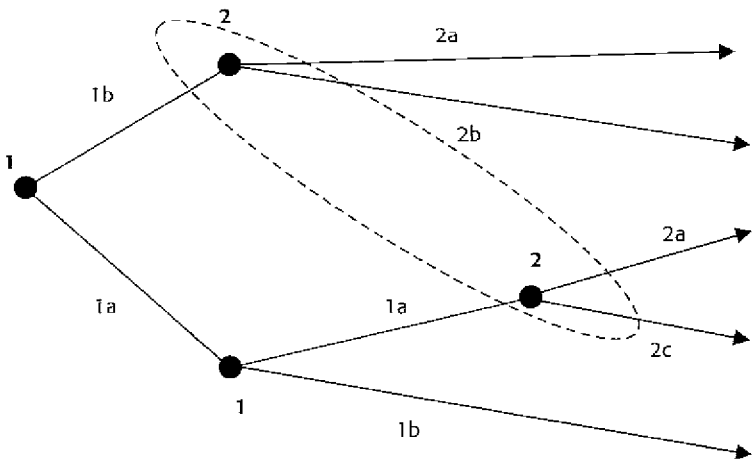
a.



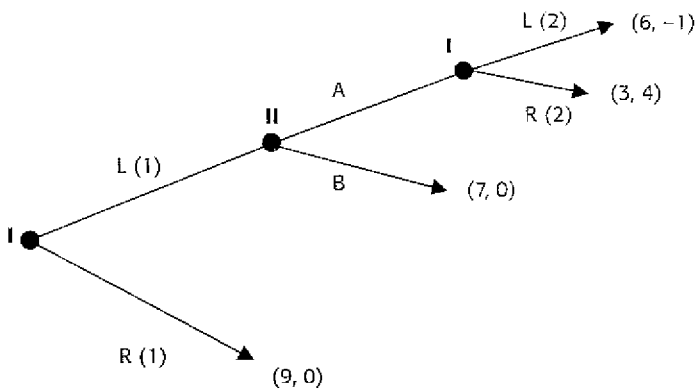
b.



c.



2.8 Considere o seguinte jogo representado em forma estendida:



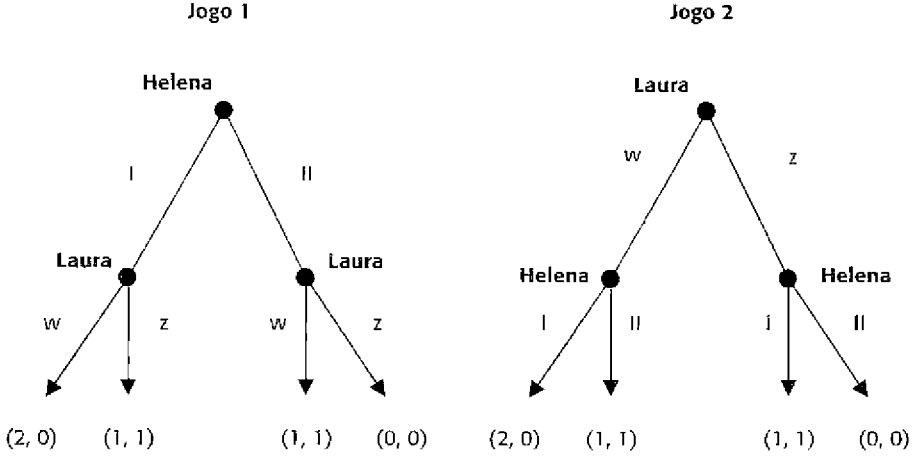
Nele há dois jogadores, denominados I e II, com suas ações sendo descritas nos ramos e as recompensas entre parênteses no diagrama. Pede-se:

a. Descrever os conjuntos de ações de cada jogador.
b. Identificar quantas e quais são as estratégias dos jogadores I e II.
c. Descrever algumas das combinações de estratégias possíveis no jogo.
d. Apresentar o jogo em forma estratégica.

2.9 Suponha dois jogadores, o Banco e a empresa *Ponzy*. A *Ponzy* é uma empresa especuladora e irresponsável, que somente consegue pagar suas dívidas contraindo novas dívidas. No início do jogo, o Banco possui duas escolhas: emprestar 10 milhões para a *Ponzy* ou não emprestar. Considere os possíveis desdobramentos da situação a seguir:

a. Se o Banco não empresta dinheiro para a *Ponzy*, o Banco fica com seus 10 milhões, a *Ponzy* nada ganha ou perde, e o jogo termina.
b. Se o Banco decide emprestar, é a vez da *Ponzy* decidir: seus proprietários podem enviar o dinheiro para um paraíso fiscal, obtendo um ganho financeiro e fechar a empresa, deixando o Banco com o prejuízo, ou pedir uma renovação do empréstimo. Assim, se eles decidirem encerrar a empresa, o Banco perde os 10 milhões, enquanto os donos da *Ponzy* lucram 1,5 milhão além dos 10 milhões do banco, e o jogo acaba.
c. Caso a *Ponzy* decida pedir a renovação de seu empréstimo, é a vez do Banco decidir, exatamente como na primeira etapa, se renova ou não o empréstimo inicial. Se o Banco decidir não renovar a *Ponzy* é obrigada a vender seus ativos e pagar o empréstimo inicial (10 milhões) mais 1 milhão de juros. O Banco termina o jogo com 11 milhões e os donos da empresa *Ponzy* com um prejuízo de 1 milhão.
d. Se o Banco decidir renovar, *Ponzy* decide fechar e aplicar os 10 milhões do empréstimo em um paraíso fiscal (ganhando 2,0 milhões além dos 10 milhões do Banco), e o Banco perde os 10 milhões originalmente aplicados.
e. Modele este jogo na forma estendida.

2.10 Considere os jogos na forma extensiva, apresentados a seguir:



Descreva o Jogo 1 e o Jogo 2 em forma estratégica, e aponte as diferenças na sequência em que os jogadores fazem seus movimentos em cada um dos jogos.

3

Jogos Simultâneos: Encontrando as Melhores Respostas Estratégicas

Com as raposas, devemos bancar raposas.

DR. THOMAS FULLER, MÉDICO BRITÂNICO (1654-1734)

INTRODUÇÃO

A epígrafe deste capítulo nos lembra de que é importante levar em consideração o que os outros pretendem, e algumas vezes também o que eles pensam que nós achamos que eles pretendem e assim por diante. Em outras palavras, precisamos começar a entender como os agentes envolvidos em situações de interação estratégica analisam a situação e tomam suas decisões, para descobrirmos as melhores respostas em um jogo.

Até aqui discutimos apenas como se modela um jogo. Modelar adequadamente uma situação de interação estratégica é de fundamental importância, pois uma modelagem inadequada pode resultar em conclusões equivocadas acerca de que estratégia adotar para obter os melhores resultados. Daí termos visto, em detalhe, os elementos necessários para se modelar uma situação de interação estratégica, assim como os tipos de modelos que podem ser criados.

Agora, contudo, já é tempo de começarmos a discutir como os jogadores tomam suas decisões em situações de interação estratégica, isto é, *como se deve jogar um jogo*. Para isso, precisamos determinar quais serão os resultados mais prováveis do jogo *caso os jogadores ajam racionalmente*. Em outras palavras, agora é o momento de analisarmos um jogo e, nessa análise, a hipótese de que os jogadores escolhem a estratégia que produz os melhores resultados, dados os seus objetivos, possui fundamental importância.

Começaremos nossa análise de jogos examinando neste capítulo *jogos simultâneos*. Ainda que esse tipo de jogo represente uma forma de interação estratégica bastante simples, pode proporcionar resultados bastante interessantes não apenas para ilustrar como muitas vezes se deve proceder em uma situação de interação estratégica, mas também para nos ajudar a entender algumas situações aparentemente paradoxais que encontramos ao estudarmos a economia, estratégias empresariais e muitas outras situações de interação social.

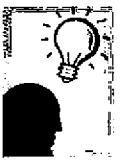
Além disso, adotaremos inicialmente a abordagem clássica de teoria dos jogos, em que é comum assumir que *a estrutura do jogo*, isto é, as estratégias que os jogadores podem adotar e as recompensas que podem obter a partir de cada combinação de estratégias, é de conhecimento comum.

Uma informação do jogo é dita de *conhecimento comum* quando todos os jogadores conhecem a informação, todos os jogadores sabem que todos os jogadores conhecem a informação, todos os jogadores sabem que todos os jogadores sabem que todos os jogadores conhecem a informação e assim por diante, até o infinito.

O leitor pode estar achando estranha essa cadeia de todos sabem que todos sabem que todos sabem... Que se estende até o infinito. No entanto, há uma razão simples para isso: sempre que temos um processo de interação estratégica, em que a escolha de um jogador depende das escolhas de outro jogador, é natural que, antes de tomar suas decisões, um jogador imagine o que o outro jogador imagina que o jogador está imaginando que o outro jogador imagina... E assim por diante, tantas vezes quanto for o processo de interação entre eles. A imposição de que essa cadeia se estenda até o infinito é apenas para dar conta de qualquer processo de interação, por mais longo que seja.[1]

Isso não significa que casos de interação estratégica em que as informações relevantes não são de conhecimento comum não podem ser analisados: como veremos mais adiante, existem métodos específicos para lidar com esse tipo de situação. Mas, por enquanto, vamos começar com situações mais simples, em que os jogadores têm conhecimento comum das informações relevantes para o processo de interação estratégica: vamos discutir os jogos de *informação completa*.

1 Isso vai ficar mais claro quando discutirmos a utilidade da hipótese de conhecimento comum para a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, mais adiante.



Um jogo é dito de *informação completa* quando as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum.

Mas por que é importante definir que as recompensas dos jogadores sejam de conhecimento comum? Como estamos supondo que os jogadores são racionais, ou seja, que adotarão as estratégias que maximizem suas recompensas, afirmar que as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum significa dizer que nenhum dos jogadores possui dúvidas sobre o resultado que os demais estão buscando obter. Assim, cada jogador sabe exatamente com quem está jogando, pois sabe quais são os objetivos dos outros jogadores.

Ao estudarmos jogos simultâneos, nosso interesse será determinar que combinação de estratégias os jogadores poderão adotar, isto é, quais serão suas ações e que consequências essas ações terão para os jogadores, desde que eles ajam racionalmente.

Para poder responder a isso, estudaremos inicialmente o que são estratégias estritamente dominantes e estratégias estritamente dominadas. Em seguida, veremos como os jogadores realizam suas escolhas quando é possível eliminar as estratégias estritamente dominadas e chegar a uma única combinação de estratégias.

Em seguida, discutiremos o importante conceito de equilíbrio de Nash, que nos permite determinar qual será a combinação de estratégias que os jogadores escolherão mesmo que não seja possível eliminar estratégias estritamente dominadas. Veremos várias aplicações interessantes do equilíbrio de Nash.

UMA PRIMEIRA BUSCA DA SOLUÇÃO DO JOGO: ELIMINANDO ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINADAS

Em alguns casos, os jogadores têm uma ou mais opções de estratégia que proporcionam resultados melhores do que alguma outra estratégia, não importando o que os demais jogadores façam. Nesse caso, a análise do jogo fica bastante facilitada, como veremos em seguida: se uma opção lhe dá um resultado sempre melhor do que outra, por que escolher esta outra, se você for racional? Assim, podemos eliminar várias estratégias que são menos interessantes do que outras.

Considere, por exemplo, a seguinte situação de interação estratégica: a empresa de sabão em pó Limpo tem de decidir se lança, ou não, uma marca biode-

gradável para competir com o produto biodegradável de sua concorrente, a empresa Bonito. Esta última, por sua vez, tem de decidir se aumenta, ou não, os gastos de propaganda com o seu produto. Os lucros de cada empresa são apresentados na forma estratégica na Figura 3.1 a seguir, em milhões de reais.[2]

	Bonito	
Limpo	**Aumentar os Gastos com Publicidade**	**Não Aumentar os Gastos com Publicidade**
Lançar o Produto Biodegradável	5, 5	7, 3
Não Lançar o Produto Biodegradável	2, 4	2, 7

Figura 3.1 Exemplo de Estratégia Estritamente Dominante

Considere inicialmente os lucros da empresa Limpo. Caso a empresa concorrente Bonito decida aumentar seus gastos em publicidade, lançar o produto biodegradável proporcionará lucros no valor de 5 milhões de reais, enquanto a decisão de não lançar o produto biodegradável produzirá lucros menores, no valor de 2 milhões de reais.

Da mesma forma, caso a empresa Bonito decida não aumentar seus gastos em publicidade, lançar o produto biodegradável produzirá lucros maiores (7 milhões) do que não lançar (2 milhões). O que você faria se fosse o presidente da empresa Limpo e tivesse que tomar uma decisão sobre o lançamento do produto biodegradável?

Como você já deve ter percebido, não importa o que a empresa Bonito decida, *é sempre melhor para a empresa Limpo lançar seu produto biodegradável.* Utilizando os termos empregados pela teoria dos jogos, a estratégia {Lançar o Produto Biodegradável} *domina* a estratégia {Não Lançar o Produto Biodegradável} no caso do jogador Limpo. Também podemos dizer que o jogador Limpo possui uma *estratégia dominante* {Lançar o Produto Biodegradável}.[3] Alternativamente, poderíamos afirmar que a estratégia {Não Lançar o Produto Biodegradável} é *dominada* pela estratégia {Lançar o Produto Biodegradável}.

Note que *todas* as recompensas da estratégia {Lançar o Produto Biodegradável} são *estritamente maiores* do que as recompensas da estratégia {Não Lançar

2 Os valores das recompensas têm sempre sentido simbólico: visam apenas a ordenar as preferências dos jogadores.
3 Examine o mesmo caso e veja que a empresa Bonito não possui estratégia dominante.

o Produto Biodegradável}. Nesse caso, diz-se que a estratégia {Lançar o Produto Biodegradável} é **estritamente dominante** *em relação à estratégia* {Não Lançar o Produto Biodegradável}.

Representa-se isso, algebricamente, da seguinte forma: seja um dado jogador i, cujas estratégias são representadas como s_i. As estratégias dos demais jogadores são representadas como s_{-i}, onde o subíndice $-i$ significa que estamos tratando das estratégias de todos os jogadores que *não* o jogador i.

Seja π_i a função de recompensa do jogador i, que especifica uma recompensa para o jogador i de acordo com a estratégia que ele e os demais jogadores adotam.[4] Se uma dada estratégia do jogador i, denominada s_i^*, é estritamente dominante em relação a uma outra estratégia s^{**}_i para este jogador, temos que:

$$\pi_i (s_i^*, s_{-i}) > \pi_i(s^{**}_i, s_{-i}), \text{ para todo } s_{-i}$$

A desigualdade anterior representa o fato de que a recompensa proporcionada por s_i^* ao jogador i é estritamente superior às recompensas proporcionadas pela estratégia s^{**}_i que o jogador i pode adotar, quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelos demais jogadores.

Mas além de estratégias estritamente dominantes, também podemos ter casos em que uma estratégia é melhor do que outra em pelo menos uma situação, sendo no restante das vezes apenas tão boa quanto esta outra. Veja o mesmo exemplo anterior, ligeiramente reformulado, na Figura 3.2 a seguir:

	Bonito	
Limpo	**Aumentar os Gastos com Publicidade**	**Não Aumentar os Gastos com Publicidade**
Lançar o Produto Biodegradável	2, 5	7, 3
Não Lançar o Produto Biodegradável	2, 4	2, 7

Figura 3.2 Exemplo de Estratégia Fracamente Dominante

No nosso exemplo reformulado, caso a empresa Bonito decida aumentar seus gastos com publicidade {Lançar o Produto Biodegradável} produz resultados tão bons quanto {Não Lançar o Produto Biodegradável}. Contudo, se a empresa Bonito decidir não aumentar seus gastos com publicidade, a empresa Limpo terá lucros maiores caso decida lançar seu detergente biodegradável.

4 Caso tenha qualquer dúvida sobre o conceito de função de recompensa, veja o capítulo anterior.

Nesse caso, em que a estratégia {Lançar o Produto Biodegradável} produz recompensas (lucros) superiores em uma situação, e recompensas tão boas como as recompensas da estratégia {Não Lançar o Produto Biodegradável} no restante das vezes, diz-se que a estratégia {Lançar o Produto Biodegradável} é *fracamente dominante em relação à estratégia* {Não Lançar o Produto Biodegradável}, para a empresa Limpo.

Da mesma forma, diz-se que a estratégia {Não Lançar o Produto Biodegradável} é *fracamente dominada* pela estratégia {Lançar o Produto Biodegradável}.

Para representar algebricamente a dominância fraca, considere novamente um dado jogador i, cujas estratégias são representadas como s_i. As estratégias dos demais jogadores são, como sempre, representadas como s_{-i}, sendo π_i a função de recompensa do jogador i. Se uma dada estratégia do jogador i, denominada s_i'', é fracamente dominante em relação a uma outra estratégia s'_i para este mesmo jogador, temos que:

$$\pi_i(s_i'', s_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \text{ , para todo } s_{-i}, \text{ e}$$
$$\pi_i(s_i'', s_{-i}) > \pi_i(s'_i, s_{-i}) \text{ , para algum } s_{-i}$$

Essa desigualdade representa o fato de que a recompensa proporcionada por s_i'' ao jogador i é maior ou igual às recompensas proporcionadas pela estratégia s'_i, quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelos demais jogadores e, para pelo menos uma das estratégias que os demais jogadores possam adotar, a estratégia fracamente dominante s_i'' produz recompensas melhores do que s'_i.

Mas nosso interesse não se limita a identificar estratégias dominantes e dominadas. Essa identificação permitirá aplicar o primeiro método para determinar o resultado de um jogo, isto é, que estratégias os jogadores devem escolher para obterem as melhores recompensas. Esse será o nosso próximo assunto.

Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

O método mais simples para se determinar o resultado de um jogo simultâneo é a chamada *eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas*. Para entender como esse método é aplicado, considere a seguinte situação hipotética: duas empresas, a Carro Novo e a Novo Auto, competem no mercado automobilístico. A empresa Carro Novo já tem seu modelo de utilitário, que é um sucesso, enquanto a Novo Auto ainda não oferece nenhum modelo de utilitário.

A Novo Auto tem três opções: (a) importar o utilitário de sua matriz estrangeira; produzir o utilitário nacionalmente; ou simplesmente permanecer fora do segmento de utilitários, decidindo não competir com a Carro Novo. A empresa Car-

ro Novo pode responder às escolhas da Novo Auto de três formas: mantendo o preço do seu modelo; diminuindo o preço do seu modelo; ou lançando uma nova versão do seu modelo.

Vamos supor que ambas as empresas tomam suas decisões ao mesmo tempo, no momento de finalizar seu planejamento anual, sem conhecer as decisões uma da outra. Contudo, como são empresas experientes no mercado e que já competiram entre si em outras oportunidades, conhecem o comportamento dos consumidores e fazem uma estimativa bastante razoável dos seus lucros e dos lucros da rival em cada situação.

A forma estratégica na Figura 3.3 (a) seguinte apresenta as estimativas de lucros (em milhões) de cada combinação de ações das duas empresas, que resultam tanto dos custos de cada opção quanto da reação da demanda a novidades dos produtos e aos preços:

	Carro Novo		
Novo Auto	**Lançar Nova Versão**	**Manter Preço**	**Reduzir Preço**
Lançar Modelo Próprio	1, 4	4, 1	1, 3
Importar da Matriz	2, 2	2, 1	2, 3
Não Competir com a *Carro Novo*	1, 1	0, 6	1, 0

Figura 3.3 (a) Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas (1ª rodada)

O leitor já deve ter percebido que a Carro Novo não possui estratégia estritamente dominante: enquanto {Lançar Nova Versão} é a melhor opção se a Novo Auto lança seu modelo de utilitário (gera um lucro estimado de 4 milhões); a estratégia {Reduzir Preço} é a melhor opção se a Novo Auto decide importar da matriz (lucro estimado de 3 milhões); e {Manter Preço} é a melhor opção se a Novo Auto decidir não competir com a Carro Novo (6 milhões).

No caso da Novo Auto também não há uma estratégia que seja sempre melhor do que todas as outras, não importando o que a Carro Novo faça. Contudo, para a Novo Auto a estratégia {Não Competir com a Carro Novo} sempre resulta em uma recompensa pior do que {Importar da Matriz}, independentemente da escolha que a Carro Novo faça: {Não Competir com a Carro Novo} é *estritamente dominada* por {Importar da Matriz}.

Assim, qualquer que seja a escolha da Carro Novo, não competir no mercado de utilitários sempre dá um resultado pior para a Novo Auto do que importar um modelo da matriz. Com isso podemos eliminar a estratégia {Não Com-

petir com a Carro Novo}, conforme foi feito na Figura 3.3 (b), ao riscarmos a estratégia {Não Competir com a Carro Novo}.

	Carro Novo		
Novo Auto	**Lançar Nova Versão**	**Manter Preço**	**Reduzir Preço**
Lançar Modelo Próprio	1, 4	4, 1	1, 3
Importar da Matriz	2, 2	2, 1	2, 3
~~Não Competir com a Carro Novo~~	~~1, 1~~	~~0, 6~~	~~1, 0~~

Figura 3.3 (b) Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas (1ª rodada)

Examinemos agora as opções da Novo Auto, para verificarmos se ainda é possível eliminar mais alguma estratégia que seja estritamente dominada. É fácil concluir que não podemos eliminar mais nenhuma opção para a Novo Auto, ao menos por enquanto: enquanto {Lançar Modelo Próprio} dá um resultando melhor do que {Importar da Matriz} se a Carro Novo mantém o preço do seu modelo atual (um lucro previsto de 4 milhões no primeiro caso contra 2 milhões no segundo), caso a Carro Novo decida lançar uma nova versão de seu modelo ou reduzir o preço de seu modelo atual para a Novo Auto é melhor importar da matriz do que lançar uma nova versão de seu próprio modelo.

Vamos examinar agora as opções da Carro Novo na Figura 3.3 (b), após a primeira rodada de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. É fácil ver agora que, *após termos eliminado a estratégia* {Não Competir com a Carro Novo} da Novo Auto, a estratégia {Manter Preço} da Carro Novo *passou a ser estritamente dominada* tanto por {Lançar Nova Versão} como por {Reduzir Preço}. Isso é uma característica importante do método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, e que vale a pena ser destacada.

Estratégias que não eram estritamente dominadas para um jogador no jogo original podem ir se tornando estritamente dominadas à medida que estratégias estritamente dominadas de *outros* jogadores são eliminadas.

Podemos então eliminar a estratégia {Manter Preço} das opções da Carro Novo na segunda rodada de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, como foi feito na Figura 3.3 (c).

Novo Auto	Carro Novo		
	Lançar Nova Versão	Manter Preço	Reduzir Preço
Lançar Modelo Próprio	1, 4	~~4, 1~~	1, 3
Importar da Matriz	2, 2	~~2, 1~~	2, 3

Figura 3.3 (c) Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas (2ª rodada)

Após eliminarmos a estratégia {Manter Preço} devemos examinar se há alguma outra estratégia da Carro Novo que possa ser eliminada. Com efeito, não há nenhuma outra estratégia que possa ser eliminada: para a Carro Novo é melhor lançar uma nova versão do seu utilitário se a Novo Auto lançar seu próprio modelo (lucro previsto de 4 milhões), enquanto é melhor para a Carro Novo reduzir o preço de seu modelo se a Novo Auto decidir importar seu utilitário da matriz (lucro previsto de 3 milhões).

Na Figura 3.3 (d) seguinte representamos o jogo após as duas rodadas de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas:

Novo Auto	Carro Novo	
	Lançar Nova Versão	Reduzir Preço
Lançar Modelo Próprio	1, 4	1, 3
Importar da Matriz	2, 2	2, 3

Figura 3.3 (d) Estratégias Restantes após duas Rodadas de Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

Na Figura 3.3 (d) é fácil observar que, embora a Carro Novo não possua estratégia estritamente dominada, o mesmo não é verdade para a *Novo Auto*. *Após a eliminação da opção de manter o preço* da Carro Novo, a estratégia de lançar seu próprio modelo tornou-se estritamente dominada pela estratégia de importar o utilitário da matriz para a Novo Auto.

Com isso podemos eliminar a estratégia da Novo Auto de lançar seu modelo de utilitário, o que já fizemos diretamente na Figura 3.3 (e) a seguir:

Novo Auto	Carro Novo	
	Lançar Nova Versão	Reduzir Preço
Importar da Matriz	2, 2	2, 3

Figura 3.3 (e) Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas (3ª rodada)

O resultado, a partir da Figura 3.3 (e), é praticamente imediato: considerando apenas a estratégia restante da Novo Auto {Importar da Matriz}, a estratégia {Lançar Nova Versão} é *estritamente dominada* por {Reduzir Preço} para a Carro Novo. Segue-se que o resultado final do jogo entre a Novo Auto e a Carro Novo é dado pela combinação de estratégias (Importar da Matriz, Reduzir Preço). Esse resultado constitui um **equilíbrio em estratégias estritamente dominantes.**

Atividade 3.1: Retorne ao jogo da Figura 3.1 e determine se há algum equilíbrio em estratégias estritamente dominantes.

Estratégias Racionalizáveis e Melhor Resposta

Assim, sempre que conseguirmos obter um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, ou seja, quando a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas nos deixar com apenas uma estratégia para cada jogador, diz-se que o jogo analisado é **solucionável por dominância.**[5] As estratégias que resultam da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, mesmo que seja mais do que uma para cada jogador, são chamadas **racionalizáveis.**

Antes de considerarmos o princípio que fundamenta o conceito de **racionalização**, é importante levar em consideração que na eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas estamos supondo que cada jogador é racional, cada jogador sabe que os outros jogadores são racionais e cada jogador sabe que os outros sabem que ele sabe que os outros jogadores são racionais e assim por diante, infinitamente, ou seja, vale a hipótese de que a racionalidade dos jogadores é de *conhecimento comum*.

Assim, a hipótese aplicada para obter a solução do jogo por intermédio da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas foi a hipótese de **conhecimento comum da racionalidade (CCR):**

Em teoria dos jogos, quando um fato é de **conhecimento comum**, isso significa que todos os jogadores sabem do fato, todos os jogadores sabem que todos os jogadores sabem do fato, todos os jogadores sabem que todos os jogadores sabem que todos os jogadores sabem do fato e assim por diante, infinitamente. Quando se supõe que a racionalidade dos jogadores é de conhecimento comum, diz-se que está sendo adotada a hipótese do **conhecimento comum da racionalidade (CCR).**

5 Do inglês, *dominance solvable*.

O princípio que fundamenta o conceito de **racionalização** é simples. Em um jogo simultâneo com dois jogadores, digamos *i* e *j*, em que *a estrutura do jogo e a racionalidade de ambos os jogadores são de conhecimento comum*, se nesse jogo alguma estratégia s_i^{**} do jogador *i* sempre produz um resultado pior para o jogador *i* do que todas as outras, não importando o que o jogador *j* faça, *não há nenhuma razão, qualquer que seja a conjectura do jogador i a respeito das estratégias que o jogador j possa querer jogar*, que justifique o jogador *i* escolher a estratégia s_i^{**}.

Para esclarecer o que queremos dizer, considere a Figura 3.3 (a), que estamos reproduzindo novamente:

	Carro Novo		
Novo Auto	**Lançar Nova Versão**	**Manter Preço**	**Reduzir Preço**
Lançar Modelo Próprio	1, 4	4, 1	2, 3
Importar da Matriz	2, 2	2, 1	1, 3
Não Competir com a *Carro Novo*	0, 1	0, 6	0, 0

Figura 3.3 (a) Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

Não há nenhuma conjectura da Novo Auto com relação ao que a Carro Novo possa fazer que justifique escolher {Não Competir com a Carro Novo}, uma vez que a estrutura do jogo (as recompensas por cada combinação de estratégias) e a racionalidade dos jogadores são de conhecimento comum.

Por exemplo, ainda que houvesse algum motivo para a Novo Auto acreditar que a Carro Novo pudesse decidir manter o preço, não haveria nenhum motivo para a Novo Auto decidir jogar {Não Competir com a Carro Novo}, pois as duas outras estratégias resultariam, sob essa hipótese, em recompensas maiores. O mesmo ocorreria se a Novo Auto acreditasse que a Carro Novo fosse escolher {Lançar Nova Versão} ou {Reduzir Preço}. Assim, a estratégia {Não Competir com a Carro Novo} não é racionalizável.

Podemos formalizar melhor essa ideia com o conceito de **melhor resposta** em teoria dos jogos. Assim, uma dada estratégia s^*_i de um jogador *i* é considerada a melhor resposta desse jogador *i* a uma dada estratégia s_{-i} dos demais jogadores se:

$$\pi_i (s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i (s_i' 0, s_{-i}) \text{ para algum } s_{-i} \text{ e todo } s_i' \neq s_i^*$$

Lembrando sempre que a função π_i é a função de recompensa do jogador *i*. Assim, afirmar que uma dada estratégia s^*_i de um jogador *i* é a melhor respos-

ta deste jogador i a uma dada estratégia s_{-i} dos demais jogadores significa afirmar que, se os demais jogadores escolherem a combinação de estratégias s_{-i}, a estratégia s^*_i é a que dá a melhor recompensa ao jogador i quando comparada a qualquer outra estratégia s'_i.

Assim como uma estratégia pode ser a melhor resposta para uma estratégia específica que os outros jogadores possam jogar, *pode acontecer* que uma outra estratégia **nunca seja a melhor resposta para um dado jogador,** qualquer que seja a estratégia que os outros jogadores decidam jogar. Uma estratégia s^{**}_i nunca é a melhor resposta para qualquer outra estratégia que os demais jogadores decidam jogar se:

$$\pi_i (s^{**}_i, s_{-i}) < \pi_i (s^*_i, s_{-i}) \quad \text{para algum } s^*_i \neq s^{**}_i \text{ e todo } s_{-i}$$

Ou seja, se existe sempre *alguma estratégia diferente de* s^{**}_i que dá uma recompensa maior *para todas as estratégias que os demais jogadores possam escolher*, segue-se que s^{**}_i nunca é uma melhor resposta para o jogador i.

É fácil perceber que **uma estratégia que é estritamente dominada para um dado jogador nunca é uma melhor resposta para este jogador.** Como vimos na seção sobre estratégias estritamente e fracamente dominantes, se uma estratégia s^{**}_i é estritamente dominada por outra estratégia s^*_i, isso significa que a estratégia s^*_i é estritamente dominante em relação a s^{**}_i, ou que:

$$\pi_i (s^*_i, s_{-i}) > \pi_i (s^{**}_i, s_{-i}) \quad \text{para todo } s_{-i}$$

Como uma estratégia s^{**}_i nunca é a melhor resposta se $\pi_i (s^*_i, s_{-i}) > \pi_i (s^{**}_i, s_{-i})$ para *algum* $s^*_i \neq s^{**}_i$ e todo s_{-i}, isto é, s^{**}_i nunca é a melhor resposta se existe *alguma outra* estratégia s^*_i que sempre resulta em uma recompensa maior do que s^{**}_i; caso a estratégia s^{**}_i seja estritamente dominada por s^*_i garantimos que seja satisfeita a condição "para *algum* $s^*_i \neq s^{**}_i$, ou seja, que existe *alguma outra* estratégia (no caso, s^*_i) que sempre resulta em uma recompensa maior do que s^{**}_i. Logo, se uma dada estratégia é estritamente dominada, ela nunca é a melhor resposta para um jogador.

Se uma estratégia nunca é a melhor resposta para um dado jogador i, não há qualquer crença do jogador i a respeito do que os demais jogadores possam fazer que justifique o jogador i jogar a estratégia que nunca é a melhor resposta. Assim, a estratégia estritamente dominada s^{**}_i não é uma estratégia **racionalizável,** no sentido de que, dada a hipótese de CCR, não há nenhuma crença por parte do jogador i que justifique jogar s^{**}_i. Assim temos que:

As estratégias que restam em um processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas são chamadas estratégias **racionalizáveis**.

A Limitação do Método de Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

Não obstante a simplicidade do método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, ele apresenta uma grave limitação: nem todos os jogos apresentam estratégias estritamente dominadas.

Considere, por exemplo, a seguinte situação de interação estratégica: uma empresa, a qual chamaremos de Entrante Potencial, tem de decidir se entra no mercado brasileiro de produtos siderúrgicos, no qual outra empresa nacional a qual chamaremos de empresa Dominante, já domina uma parcela significativa do comércio desses produtos.

O problema é que a Entrante deve tomar sua decisão de exportar para o mercado brasileiro sem saber se a empresa Dominante decidiu investir, expandindo sua capacidade produtiva e tornando viável responder com uma guerra de preços a um aumento das importações de produtos siderúrgicos, aumentando suas vendas internas de forma a reduzir o preço no mercado e provocar prejuízos às exportações da Entrante Potencial para o Brasil, ainda que com a redução de seu próprio lucro; ou se a empresa Dominante decidiu manter sua capacidade produtiva como está.

Por outro lado, a empresa Dominante tem de decidir se expande ou não sua capacidade produtiva sem saber se a Entrante Potencial decidiu exportar para o Brasil em larga escala, em pequena escala ou não exportar para o Brasil. A Figura 3.4 a seguir representa esse tipo de situação, no chamado *Jogo de Prevenção da Entrada no Mercado Nacional*, apresentando os ganhos de cada empresa para cada combinação de estratégias da Entrante Potencial e da empresa Dominante, em valores simbólicos:[6]

	Entrante Potencial		
Empresa Dominante	**Não Exporta**	**Exporta em Pequena Escala**	**Exporta em Larga Escala**
Investe	2, 1	1, 0	0, −1
Não Investe	1, 0	2, 1	−1, 2

Figura 3.4 O Jogo de Prevenção da Entrada no Mercado Nacional

6 Os valores estabelecidos como recompensas para os jogadores não expressam diretamente os lucros de cada jogador, mas apenas o ordenamento das preferências dos jogadores.

Basta um rápido exame do jogo para ver que o método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas é inútil: não há nenhuma estratégia estritamente dominada para ser eliminada por nenhum jogador.

Com efeito, para a empresa Dominante {Investe} é melhor do que {Não Investe} se a Entrante Potencial não exporta, pois não ampliar sua capacidade de produção, ainda que uma outra empresa não ingresse no mercado brasileiro, sinaliza fraqueza e pode atrair novos exportadores interessados em ocupar o espaço deixado pela empresa Dominante.

Contudo, se a empresa Dominante tivesse certeza de que a Entrante Potencial exportaria em pequena escala, o melhor para a empresa Dominante seria não investir, pois a entrada da Entrante Potencial em pequena escala seria suficiente para ocupar todas as possibilidades de venda lucrativas no mercado, "fechando" assim o mercado para novas entradas e dispensando o investimento, com o custo potencial da necessidade de manter capacidade ociosa para prevenir entradas futuras no mercado brasileiro.

Por outro lado, caso a Entrante Potencial decida ingressar no mercado nacional com exportações em larga escala, para a empresa Dominante possuir capacidade produtiva disponível para aumentar a sua oferta e reduzir preços, causando prejuízos à rival estrangeira, novamente se torna uma opção melhor do que ser obrigada a acomodar a entrada por não dispor de capacidade produtiva para expandir significativamente sua oferta no mercado.

Isso porque não apenas a guerra de preços causa prejuízos à empresa que direcionou uma parte significativa de sua produção ao Brasil, como também sinaliza para outras empresas que no futuro venham a planejar ingressar no mercado brasileiro que a empresa Dominante é um competidor agressivo. Logo, para a empresa Dominante não há uma estratégia estritamente dominada.

Para o caso de a empresa Dominante decidir investir, a melhor resposta para a Entrante Potencial é não exportar. Entretanto, se a empresa Dominante decide não investir, a melhor resposta para a Entrante Potencial se torna exportar para o Brasil em larga escala. Assim, as estratégias {Não Exporta} e {Exporta em Larga Escala} não são estritamente dominadas.

Por outro lado, a estratégia {Exporta em Pequena Escala} gera uma recompensa maior do que {Não Exporta} se a empresa Dominante não investe, e maior do que {Exporta em Grande Escala} se a empresa Dominante decide investir. Dessa maneira, também não há uma estratégia estritamente dominante para a Entrante Potencial.

Portanto, não há um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes. Precisamos de um outro método para determinar o resultado desse jogo. Esse mé-

todo terá de ser mais geral do que o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Precisamos conhecer o equilíbrio de Nash.

BOX 3.1

Nem Todas as Estratégias que não Podem Ser Eliminadas em um Processo de Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas São, Necessariamente, Racionalizáveis.

Como vimos, as estratégias que sobrevivem em um processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas são chamadas estratégias *racionalizáveis*. O inverso, contudo, não é necessariamente verdade: *nem toda estratégia que não pode ser eliminada em um processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas é, necessariamente, racionalizável*.

Considere novamente o jogo da Figura 3.4. Dada a definição de estratégias racionalizáveis, não existe nenhuma crença racional que justifique a Entrante Potencial jogar {Exporta em Pequena Escala}: se a Dominante escolher investir, a melhor resposta para a empresa Entrante é {Não Exporta}; caso a Dominante decida não investir, a melhor resposta para a Entrante Potencial é {Exporta em Grande Escala}.

Dessa forma, poderíamos eliminar {Exporta em Pequena Escala} das estratégias racionalizáveis do jogo da Figura 3.4, embora {Exporta em Pequena Escala} não seja estritamente dominada por nenhuma outra estratégia, pois ela *nunca é a melhor resposta* para a empresa Entrante.

No entanto, não poderíamos eliminar as estratégias {Não Exporta} e {Exporta em Grande Escala}, pois ambas são racionalizáveis: {Não Exporta} é a melhor resposta para a decisão da Dominante de lutar, e {Exporta em Grande Escala} é a melhor resposta para a escolha de Dominante de acomodar.

SOLUCIONANDO UM JOGO SIMULTÂNEO: O EQUILÍBRIO DE NASH

Necessitamos de um conceito mais geral de solução de jogos simultâneos, que permita tratar tanto de jogos que possuem estratégias estritamente dominadas e que, portanto, podem ser resolvidos pela eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, *como também* de jogos nos quais não é possível identificar estratégias dominadas. Esse conceito é o chamado *equilíbrio de Nash*:

Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando *cada* estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores, e isso é verdade para *todos* os jogadores.

Vimos anteriormente que uma dada estratégia s^*_i de um jogador i é considerada a melhor resposta desse jogador i a uma dada estratégia s_{-i} dos demais jogadores se: $\pi_i (s^*_i, s_{-i}) \geq \pi_i (s'_i, s_{-i})$ para algum s_{-i} e todo $s'_i \neq s^*_i$ isto é, *se não* há outra estratégia disponível para o jogador i que produza uma recompensa mais elevada do que s_i^*, quando uma dada combinação de estratégias s_{-i} é jogada pelos demais jogadores.

O que a definição que apresentamos do equilíbrio de Nash está exigindo é que *todas* as estratégias adotadas por *todos* os jogadores sejam as melhores respostas às estratégias dos demais. Em termos um pouco mais formais, para que uma dada combinação de estratégias seja considerada um equilíbrio de Nash é necessário que, para cada estratégia s_i^* que pertença à combinação, tenhamos:

$$\pi_i (s^*_i, s^*_{-i}) \geq \pi_i (s_j, s^*_{-i}) \text{ para todo } s_i \text{ e todo } i$$

Onde, como sempre, π_i representa a função de recompensas de um jogador i, s_i é uma dada estratégia do jogador i, s_{-i} é uma dada estratégia dos demais jogadores que não i, e o sinal de asterisco indica que a estratégia faz parte de um equilíbrio de Nash.

Vejamos um exemplo para melhor visualizarmos as características de um equilíbrio de Nash. Nesse caso, nosso exemplo será o jogo de prevenção de entrada no mercado nacional, que analisamos anteriormente como um exemplo de jogo que não possui equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, e que reproduzimos novamente:

	Entrante Potencial		
Empresa Dominante	**Não Exporta**	**Exporta em Pequena Escala**	**Exporta em Larga Escala**
Investe	2, 1	1, 0	0, −1
Não Investe	1, 0	2, 1	−1, 2

Figura 3.4 O Jogo de Prevenção da Entrada no Comércio Nacional

Nesse jogo, a visualização do equilíbrio de Nash não é imediata. Por exemplo, se a empresa Dominante não investe, a melhor resposta para a Entrante Potencial é {Exporta em Larga Escala}. Contudo, a recíproca não é verdadeira: {Não Investe} não é a melhor resposta a {Exporta em Larga Escala} – {Não Investe} resulta em uma recompensa de –1 para a empresa Dominante caso a Entrante Potencial jogue {Exporta em Larga Escala}, enquanto {Investe} resultaria em uma recom-

pensa de 0 na mesma situação. Assim, a condição do equilíbrio de Nash não é satisfeita.

Se a empresa Entrante exporta em larga escala, a melhor resposta para a empresa Dominante é {Investe}. Novamente, porém, {Exporta em Larga Escala} deixa de ser a melhor resposta para a Entrante Potencial, e mais uma vez a condição do equilíbrio de Nash não é satisfeita.

Na verdade, há somente uma combinação de estratégias que satisfaz à condição do equilíbrio de Nash de serem as melhores respostas umas às outras: a combinação de estratégias formada pelo par ordenado (Investe, Não Exporta): se a empresa Dominante decidir investir, o melhor que a Entrante Potencial tem a fazer é não exportar, e uma vez que a Entrante Potencial tenha decidido não exportar, o melhor para a empresa Dominante é investir.

Contudo, mesmo em uma forma estratégica relativamente simples como a da Figura 3.4, pode-se levar algum tempo para identificar se há algum equilíbrio de Nash. No caso de jogos envolvendo um maior número de estratégias, a identificação pode se tornar ainda mais demorada. Pode ser prático, portanto, adotar algum artifício que ajude a visualizar com maior rapidez se há algum equilíbrio de Nash em uma forma estratégica.

A ideia do equilíbrio de Nash é a de que cada jogador está adotando a melhor resposta ao que os demais jogadores estão fazendo, e isso é válido para todos os jogadores ao mesmo tempo. Temos apenas de encontrar um meio mais rápido de identificar se há alguma combinação de estratégias que satisfaça a esse critério.

Algo que poderia facilitar muito no momento de identificar o equilíbrio de Nash seria indicar, *dada a estratégia adotada pelo outro jogador*, qual a melhor escolha para o jogador em questão. Em seguida, repetiríamos o processo para o outro jogador, até que conseguíssemos identificar uma combinação de estratégias em que cada uma delas fosse a melhor resposta à outra e vice-versa.

Uma das formas de fazer isso seria *indicar a estratégia que resulta na maior recompensa ao jogador que está nas linhas, para cada uma das colunas da forma estratégica*. Poderíamos fazer isso, por exemplo, colocando a letra "l" entre parênteses (l) ao lado da recompensa que corresponde à melhor resposta do jogador que está nas linhas para o que o jogador que está nas colunas está fazendo. Esse procedimento seria repetido para *cada estratégia* que o jogador representado nas colunas pode adotar. Isso foi feito na Figura 3.4 (a).

Empresa Dominante	Entrante Potencial		
	Não Exporta	Exporta em Pequena Escala	Exporta em Larga Escala
Investe	(l) 2, 1	1, 0	(l) 0, –1
Não Investe	1, 0	(l) 2, 1	–1, 2

Figura 3.4 (a) O Jogo de Prevenção da Entrada no Comércio Nacional – A Melhor Resposta da Empresa Dominante

A indicação (l) na recompensa para o jogador que está nas linhas (empresa Dominante) na combinação de estratégias (Investe, Não Exporta) significa que a melhor resposta da empresa Dominante para a estratégia {Não Exporta} da Entrante Potencial é {Investe}, pois essa escolha dá uma recompensa superior (no caso, 2) à recompensa resultante da adoção de {Não Investe} (no caso, 1). O mesmo raciocínio se aplica às combinações assinaladas: (Não Investe, Exporta em Pequena Escala) e (Investe, Exporta em Larga Escala).

O passo seguinte no nosso artifício de determinação do equilíbrio de Nash consiste em proceder da mesma forma com as estratégias do jogador que se encontra nas colunas. Para isso, assinalamos com a letra "c" entre parênteses (c) *a maior recompensa, para o jogador que está nas colunas, que corresponde a uma dada linha* e que identifica *a melhor resposta* do jogador que está nas colunas para uma dada estratégia do jogador que está nas linhas.

O processo de identificação da melhor resposta é repetido, *agora para cada uma das linhas*. Com isso indicaremos as melhores respostas do jogador que está nas colunas para *cada uma das estratégias* que o jogador que se encontra nas linhas pode vir a escolher.

A aplicação desse método ao Jogo de Prevenção da Entrada no Comércio Nacional pode ser visto na Figura 3.4 (b):

Empresa Dominante	Entrante Potencial		
	Não Exporta	Exporta em Pequena Escala	Exporta em Larga Escala
Investe	(l) 2, 1 (c)	1, 0	(l) 0, –1
Não Investe	1, 0	(l) 2, 1	–1, 2 (c)

Figura 3.4 (b) O Jogo de Prevenção da Entrada no Comércio Nacional – A Melhor Resposta para a Entrante Potencial

Assim, a indicação (c) na recompensa para o jogador que está nas colunas (Entrante Potencial) na combinação de estratégias (Investe, Não Exporta) sig-

nifica que a melhor resposta da Entrante Potencial para a estratégia {Investe} da empresa Dominante é {Não Exporta}. {Não Exporta} é a melhor resposta da Entrante Potencial para a estratégia {Investe} da empresa Dominante porque essa escolha dá uma recompensa superior (no caso, 1) à recompensa resultante da adoção de {Exporta em Pequena Escala} (no caso, 0) e ainda maior do que {Exporta em Larga Escala} (no caso, −1).

O mesmo raciocínio se aplica quando consideramos a melhor reposta da Entrante Potencial à adoção, pela empresa Dominante, da estratégia {Não Investe}: assinalamos a opção de exportar em larga escala que fornece uma recompensa melhor do que exportar em pequena escala, e melhor ainda do que não exportar.

Observando a Figura 3.4 (b), vemos que a combinação de estratégias que satisfaz à condição do equilíbrio de Nash de serem as melhores respostas umas às outras, ou seja, a combinação de estratégias formada pelo par ordenado (Investe, Não Exporta) é a única que se encontra assinalada tanto com um (l) como com um (c). Assim, encontramos nosso método de identificação de equilíbrios de Nash.

Após aplicarmos o método de assinalar com (l) a melhor resposta do jogador nas linhas para cada estratégia do jogador nas colunas, e assinalar com um (c) a melhor resposta do jogador nas colunas para cada estratégia do jogador nas linhas, sempre que uma combinação de estratégias estiver assinalada simultaneamente com (l) e (c), essa combinação de estratégias será um equilíbrio de Nash.

BOX 3.2

Equilíbrio de Nash no Mercado Internacional de Petróleo?

Em seu artigo "An Economic Analysis of Aspects of Petroleum and Military Security in the Persian Gulf" (*Contemporary Economic Policy*, vol. 19, n. 4, October 2001, p. 371-381), Duane Chapman e Neha Khanna propõem explicar a estabilidade do preço internacional do petróleo entre 1986 e 1999, quando este se situou de forma estável entre US$15 e US$20.

Os autores afirmam que o custo de produção do petróleo nos países produtores de baixo custo (Arábia Saudita e Iraque, principalmente) muito provavelmente se situa em torno de US$5. Assim, se o mercado internacional de petróleo fosse um mercado competitivo no período por eles analisado, o preço se situaria em torno desse valor.

Por outro lado, pelos cálculos de Chapman e Khanna, se o mercado fosse um mercado monopolizado, o preço internacional do petróleo se situaria em torno de US$30. No entanto, o preço se manteve por todo aquele período em um valor intermediário entre o preço competitivo e o preço de monopólio.

Chapman e Khanna apresentam uma explicação para essa estabilidade. Segundo eles, essa faixa de preço que se manteve estável entre US$15 e US$20 corresponde-

ria, no período que vai de 1986 a 1999, a um *equilíbrio de Nash*: uma situação em que nenhuma parte conseguiria melhorar sua situação alterando sua estratégia. De acordo com Chapman e Khanna, esse equilíbrio de Nash era a melhor resposta possível tanto para os países desenvolvidos quanto para os países produtores do Oriente Médio.

Para os países desenvolvidos, a faixa de preço entre US$15 e US$20 representava um preço suficientemente alto para evitar que a produção nos Estados Unidos e no Mar do Norte fosse abandonada, sem ser tão elevado a ponto de gerar uma inflação indesejável. Segundo Chapman e Khanna, o custo da produção de Petróleo nos Estados Unidos e no Mar do Norte é pelo menos três vezes maior do que em um produtor do Golfo Pérsico de baixo custo, e um preço do petróleo muito baixo inviabilizaria a produção nessas áreas, além de aumentar o consumo e com isso a dependência desses países.

Já para os países produtores, um preço do petróleo entre US$15 e US$20 seria suficientemente alto para financiar seus gastos militares, dada a instabilidade da região. Um preço mais elevado enfrentaria resistência dos países desenvolvidos, e um preço mais baixo não permitira a esses países investirem o necessário em sua segurança.

Equilíbrio de Nash Estrito

O equilíbrio de Nash que estudamos no jogo de prevenção da entrada no mercado nacional é um equilíbrio em que, dado o que o outro jogador estiver fazendo, não há nenhuma estratégia que seja pelo menos tão boa quanto a estratégia que os jogadores estão jogando no equilíbrio de Nash. Cada jogador está jogando a estratégia, no equilíbrio de Nash que acabamos de ver, que lhe dá uma recompensa estritamente superior às demais.

Assim, uma vez que o Entrante Potencial tenha decidido jogar {Não Exporta}, a sua estratégia no equilíbrio de Nash do jogo, não há nenhuma outra estratégia que dê um resultado pelo menos tão bom quanto {Investe} para a empresa Dominante. Por outro lado, uma vez que a empresa Dominante tenha decidido investir, não há nenhuma estratégia que dê um resultado tão bom para a Entrante Potencial quanto {Não Exporta}. Nesse caso, diz-se que a combinação de estratégias (Investe, Não Exporta) constitui um **equilíbrio de Nash estrito**.

Mais formalmente, um equilíbrio de Nash estrito exige que:

$$\pi_i (s_i^*, s_{-i}^*) > \pi_i (s_i, s_{-i}^*), \text{ para todo } s_i \text{ e todo } i$$

Contudo, o equilíbrio de Nash não exige que as estratégias jogadas resultem em recompensas estritamente superiores às demais recompensas. Quando es-

crevemos que $\pi_i (s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i (s_i, s_{-i}^*)$, para todo s_i e todo i, e empregamos o sinal de "≥", estamos apenas exigindo que não haja nenhuma outra estratégia s_i que gere uma recompensa *superior* a s^*_i, dada a estratégia s^*_{-i} do outro jogador.

Assim, suponha que o jogo de prevenção da entrada no mercado nacional tivesse suas recompensas ligeiramente alteradas na forma da Figura 3.4 (c) seguinte, em que aumentamos a recompensa da empresa Dominante para que ela obtenha a mesma recompensa, quer invista ou não, caso a Entrante decida não exportar:

	Entrante Potencial		
Empresa Dominante	**Não Exporta**	**Exporta em Pequena Escala**	**Exporta em Larga Escala**
Investe	2, 1	1, 0	0, −1
Não Investe	2, 0	2, 1	−1 ,2

Figura 3.4 (c) O Jogo de Prevenção da Entrada no Comércio Nacional – Sem Equilíbrio de Nash Estrito

Nesse caso, a combinação de estratégias {Investe, Não Exporta} continua sendo o equilíbrio de Nash do jogo. Todavia, agora a estratégia {Não Investe} resulta na mesma recompensa da estratégia {Investe} para a estratégia da Entrante Potencial que irá compor o equilíbrio de Nash do jogo (no caso, a estratégia {Não Exporta}). Nesse caso, diz-se que não há um equilíbrio de Nash estrito.

Equilíbrio em Estratégias Estritamente Dominantes e Equilíbrio de Nash Estrito

Acabamos de ver que, mesmo que não haja equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, pode haver um equilíbrio de Nash no jogo. Isso nos leva a fazer a pergunta inversa: se houver um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, ele será também um equilíbrio de Nash?

Para responder a isso, considere o seguinte jogo: suponha dois países, aos quais chamaremos de A e B, ambos exportando produtos agropecuários um para o outro. Tanto o país A quanto o país B têm apenas duas opções para tributar suas importações: ou adotam tarifas baixas (5% sobre o valor do produto importado), ou adotam tarifas elevadas (40% sobre o valor do produto importado).

Obviamente, na prática, os países têm um contínuo de opções para tributar suas importações, mas vamos ignorar esse fato para simplificar nossa análise,

uma vez que supor apenas dois níveis tarifários não altera a essência do exemplo, útil para entender impasses comuns no comércio internacional. A forma estratégica na Figura 3.5 ilustra as recompensas de cada país de acordo com as tarifas escolhidas, recompensas essas que podem ser entendidas como os ganhos ou perdas dos produtores de A e B, em milhares de dólares:

	País B	
País A	**Tarifa Alta**	**Tarifa Baixa**
Tarifa Alta	800, 800	2.300, (700)
Tarifa Baixa	(700), 2.300	1.700, 1.700

Figura 3.5 O Jogo do Comércio Internacional

Vemos que se os dois países adotam tarifas baixas, tanto os produtores de A como os de B obtêm um ganho substantivo (1 milhão e 700 mil dólares cada um). Se ambos adotam tarifas elevadas, os ganhos se reduzem substancialmente (800 mil dólares cada um). Contudo, se um país adota uma tarifa elevada enquanto o outro adota uma tarifa baixa, o país que adota a tarifa elevada lucra 2 milhões e 300 mil dólares à custa do outro, que amarga um prejuízo de 700 mil dólares (o valor negativo é indicado entre parênteses). Como poderíamos analisar esse jogo?

Um primeiro passo seria investigar a presença de estratégias estritamente dominadas, e eliminá-las do jogo. Com efeito, basta uma rápida investigação para verificarmos que a estratégia {Tarifa Baixa} é estritamente dominada pela estratégia {Tarifa Alta} para os dois países. Segue-se assim que há um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, em que os dois países adotam tarifas altas, como podemos ver na Figura 3.5 (a), na qual eliminamos as estratégias dominadas dos dois países:

	País B	
País A	**Tarifa Alta**	~~**Tarifa Baixa**~~
Tarifa Alta	800, 800	~~2.300, (700)~~
~~Tarifa Baixa~~	~~(700), 2.300~~	~~1.700, 1.700~~

Figura 3.5 (a) O Jogo do Comércio Internacional –
Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

Vejamos agora se existe um equilíbrio de Nash no jogo do comércio internacional. Aplicamos o método anteriormente descrito a esse jogo, que consiste em

assinalar (l) para a melhor resposta do jogador que se encontra na linha (país A) para cada escolha do jogador que se encontra na coluna (país B), e em assinalar (c) para a melhor resposta do jogador que se encontra na coluna (país B) para cada escolha do jogador que se encontra na linha (país A), na Figura 3.5 (b):

	País B	
País A	**Tarifa Alta**	**Tarifa Baixa**
Tarifa Alta	(l) 800, 800 (c)	(l) 2.300, (700)
Tarifa Baixa	(700), 2.300 (c)	1.700, 1.700

Figura 3.5 (b) O Jogo do Comércio Internacional – A Determinação do Equilíbrio de Nash

Ao empregar nosso artifício, teremos um equilíbrio de Nash sempre que na mesma célula houver um (c) e um (l). É fácil observar que o resultado é o mesmo obtido com a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas: (Tarifa Alta, Tarifa Alta). Mais especificamente, trata-se de um equilíbrio de Nash estrito.

Esse resultado, obtido para o caso específico do jogo do comércio internacional, na verdade é *geral*: se um jogo apresenta um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, esse equilíbrio é, necessariamente, também um equilíbrio de Nash *estrito*. Isso porque o equilíbrio de Nash estrito estabelece que:

$$\pi_i (s_i^*, s_{-i}^*) > \pi_i (s_i, s_{-i}^*), \text{ para todo } s_i \text{ e todo } i$$

Ou seja, o equilíbrio de Nash estrito estabelece que uma dada estratégia de um jogador (representada por s^*_i) deve resultar em uma recompensa estritamente maior do que qualquer outra estratégia desse jogador (representada por s_i), *dadas as estratégias dos demais jogadores* (representadas por s^*_{-i}), e isso deve ser verdade para todos os jogadores.

Já no caso em que uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, uma dada estratégia do jogador i, denominada s_i^*, deve resultar em uma recompensa estritamente maior, pois se trata de um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, ou seja, estratégias que sempre dão um resultado estritamente melhor do que qualquer outra estratégia do jogador (novamente representada por s_i), *quaisquer que sejam as estratégias jogadas pelos demais jogadores* (representadas por s^*_{-i}), e isso deve ser verdade para todos os jogadores. Algebricamente temos de:

$$\pi_i (s_i^*, s_{-i}) > \pi_i (s_i, s_{-i}) \text{ para todo } s_i \text{, todo } s_{-i} \text{ e todo } i$$

Assim, se for verdade que uma estratégia é o melhor para um jogador, não importando qual estratégia os outros jogadores escolham, e isso for verdade para todos os jogadores – o que é a condição do equilíbrio em estratégias estritamente dominantes –, obviamente essa mesma estratégia de cada jogador também terá de ser a melhor resposta para uma dada estratégia específica dos outros jogadores, que é a condição do equilíbrio de Nash.

Em outras palavras, como a condição do equilíbrio em estratégias estritamente dominantes é muito mais restritiva do que a condição de equilíbrio de Nash estrito, segue-se que todo equilíbrio em estratégias estritamente dominantes é também um equilíbrio de Nash estrito.

Atividade 3.2: Quando eliminamos estratégias estritamente dominadas, se chegarmos a um equilíbrio, esse equilíbrio será também um equilíbrio de Nash estrito. Contudo, ao eliminarmos estratégias *fracamente* dominadas, também podemos eliminar equilíbrios de Nash que não são estritos! Vá até o exercício 3.2 no final deste capítulo e teste a afirmação que acabamos de fazer.

Outra pergunta interessante a ser feita é se, na medida em que cada jogador está adotando as melhores respostas às escolhas dos demais jogadores, a combinação de estratégias que resulta do equilíbrio de Nash é a melhor para todos. Para responder a isso é necessário conhecer o conceito de eficiência de Pareto, ou eficiência paretiana, que será nosso próximo assunto.

Equilíbrio de Nash e Ótimo de Pareto

Quando a situação de pelo menos um agente melhora, sem que a situação de nenhum dos outros agentes piore, diz-se que houve uma *melhoria paretiana*, ou uma *melhoria no sentido de Pareto*.[7] Da mesma forma, se em uma dada situação não é mais possível melhorar a situação de um agente sem piorar a de outro, diz-se que essa situação é um *ótimo de Pareto*, o que significa que, dadas as circunstâncias, ganhos de eficiência não são mais possíveis.

O conceito de melhoria paretiana é muito importante para a teoria econômica, uma vez que permite identificar possibilidades de aumento de eficiência que não teriam, em princípio, razão para enfrentar nenhum tipo de oposição: se, em virtude de alguma mudança, alguém melhora sem que ninguém

7 Conceito assim denominado em homenagem ao economista italiano que o formulou, Vilfredo Pareto (1848-1923).

piore, por que alguém haveria de se opor a essa mudança que produz maior eficiência?

O conceito de equilíbrio de Nash exige que cada jogador individualmente adote a melhor resposta às estratégias dos demais, mas *isso não implica que a situação resultante das decisões conjuntas dos jogadores será a melhor possível*. Por meio de uma rápida inspeção no jogo da Figura 3.5, podemos observar que as recompensas do equilíbrio de Nash (800, 800) são inferiores às recompensas que resultam da combinação de estratégias (Tarifa Baixa, Tarifa Baixa), em que os jogadores obtêm as recompensas (1.700, 1.700). Se os dois jogadores concordassem em reduzir suas tarifas simultaneamente, ambos sairiam ganhando.

O problema é que o equilíbrio de Nash nada tem a ver com a noção de ótimo de Pareto: o fato de que os jogadores estão adotando as melhores respostas às escolhas dos demais não significa, necessariamente, que suas decisões, *quando tomadas em conjunto*, resultam na melhor situação possível.

Com efeito, uma escolha que, do ponto de vista de um agente isoladamente pode ser ótima, caso seja adotada pelos outros agentes pode se revelar um problema. Impor uma tarifa elevada sobre as importações que chegam de outro país pode parecer uma boa ideia para um país isoladamente, mas se todos os países tomam a mesma decisão, o comércio internacional se reduz e todos saem prejudicados.

É isso que o jogo do comércio internacional da Figura 3.5 ilustra: como o conceito de equilíbrio de Nash exige apenas que cada jogador adote a melhor resposta em relação aos demais, sem investigar a natureza da interação resultante – não há por que esperar que o resultado seja um ótimo de Pareto: tudo irá depender da natureza da interação entre os jogadores.

Todavia, muitas vezes podemos encontrar mais de um equilíbrio de Nash. Esse será o nosso próximo assunto.

Um Caso de Mais do que um Equilíbrio de Nash

Com efeito, pode acontecer que haja mais do que um equilíbrio de Nash (ou até mesmo que não haja um equilíbrio de Nash, como veremos mais adiante). Se os jogadores não alternam suas estratégias aleatoriamente (isto é, adotam estratégias puras – conceito que será discutido no Capítulo 5), pode muito bem acontecer que não haja um equilíbrio de Nash.

Vejamos um exemplo de cada um desses casos, começando pelo caso em que há mais de um equilíbrio de Nash. Considere o jogo a seguir:

	AntiVírus	
SysOp	Atualizar	Não Atualizar
Desenvolver	2, 1	−1, −2
Não Desenvolver	0, -1	1, 2

Figura 3.6 O Jogo de Coordenação do Padrão Tecnológico

O jogo da Figura 3.6 representa uma situação de interação estratégica em que um fabricante de sistemas operacionais (SysOp) tem de decidir se desenvolve ou não uma nova ferramenta em seu sistema operacional, e uma empresa que produz software antivírus (AntiVírus) tem de decidir, simultaneamente, se atualiza seu software para a nova ferramenta a ser introduzida no sistema operacional.

Nesse jogo, embora as empresas não mantenham contato para coordenar suas decisões, ambas têm interesse em uma solução conjunta: decisões divergentes (se a SysOp desenvolve a nova ferramenta e a AntiVírus não atualiza seu programa, ou se a SysOp não desenvolve a nova ferramenta enquanto a AntiVírus atualiza seu programa) trazem prejuízos para ambas (representados simbolicamente pelas recompensas com sinal negativo).

A presença de mais de um equilíbrio de Nash é o que ocorre no jogo de coordenação do padrão tecnológico da Figura 3.6. Assim como temos um equilíbrio de Nash na combinação de estratégias (Desenvolver, Atualizar), temos outro equilíbrio de Nash na combinação (Não Desenvolver, Não Atualizar) (o leitor deve investigar por que essa combinação também é um equilíbrio de Nash).

Em qualquer dos dois casos, as estratégias são as melhores respostas umas às outras. Contudo, é óbvio que as duas coisas não podem ocorrer ao mesmo tempo: ou bem a SysOp desenvolve sua ferramenta e a AntiVírus atualiza seu software, ou bem nem a SysOp desenvolve sua ferramenta, nem a AntiVírus atualiza seu software. Será que isso significa que o equilíbrio de Nash não é útil?

O conceito do equilíbrio de Nash permanece útil para a compreensão e análise de jogos simultâneos, ainda que não produza um único resultado. De fato, sabemos que em uma série de situações concretas existem várias possibilidades de equilíbrio, no sentido preciso de situações em que os agentes não possuem qualquer estímulo para mudar suas decisões.

Por sinal, é exatamente isso que o conceito de equilíbrio de Nash procura captar: *situações em que os agentes não teriam estímulos para mudar suas decisões*. E muitas vezes há mais de uma situação em que os agentes podem se "acomodar", sem que necessariamente seja a melhor situação possível para alguns deles.

Outro exemplo pode ilustrar a importância de analisar previamente situações indesejadas. Considere o jogo a seguir:

	Bebidas S.A.	
Refrescos S.A.	Adota Campanha Agressiva	Não Adota Campanha Agressiva
Adota Campanha Agressiva	−20, −20	10, −10
Não Adota Campanha Agressiva	−10, 10	0, 0

Figura 3.7 O Jogo da Campanha Publicitária

Na Figura 3.7, temos a representação de uma situação de interação estratégica em que duas empresas, a Refrescos S.A. e a Bebidas S.A., têm de decidir se adotam, ou evitam, campanhas publicitárias agressivas. A pior situação para as duas é quando ambas decidem adotar campanhas publicitárias agressivas: os gastos são elevados e não há alteração significativa na parcela de mercado atendida por cada empresa, de tal forma que as empresas acabam arcando com um prejuízo de 20 milhões de reais cada uma.

Se uma das empresas adota a estratégia da campanha agressiva, enquanto a outra evita o confronto, a empresa que adotou a campanha agressiva tem lucros substanciais (10 milhões de reais), enquanto a empresa que evitou o confronto sofre perda de 10 milhões de reais. Finalmente, se nenhuma das duas adota campanhas agressivas, tudo fica inalterado, e as empresas não têm lucros ou perdas.

Analisando essa situação a partir do conceito de equilíbrio de Nash chegamos a um resultado muito interessante. Temos novamente dois equilíbrios de Nash: (Adota Campanha Agressiva, Não Adota Campanha Agressiva) e (Não Adota Campanha Agressiva, Adota Campanha Agressiva).

Isso porque a melhor resposta a uma campanha agressiva é não responder a ela, sob pena de aumentar suas perdas (tanto quanto as do seu competidor). E a melhor resposta a um competidor que não adota uma campanha agressiva é, justamente, adotar uma campanha agressiva, que irá aumentar seus ganhos até o máximo de 10 milhões de reais.

O problema aqui é que não sabemos *qual* das empresas irá ceder a iniciativa da campanha publicitária agressiva para outra. Sem um mecanismo que influencie as decisões, de forma a evitar o resultado indesejável, dados os ganhos envolvidos, corre-se o risco de que as *duas* empresas decidam adotar campanhas agressivas maximizando seus prejuízos.

Não cabe, portanto, exigir do conceito de equilíbrio de Nash a determinação a respeito de em que situação específica os agentes irão se "acomodar", uma vez que isso provavelmente será determinado por fatores circunstanciais. Por outro lado, esses fatores circunstanciais vêm cada vez mais atraindo a atenção dos teóricos de jogos.

Isso se deu especialmente a partir dos trabalhos de Thomas C. Schelling, um dos ganhadores do Prêmio Nobel de Economia de 2005. Foi Schelling quem primeiro desenvolveu uma das ferramentas mais importantes para estudar como pode se dar o processo de seleção entre múltiplos equilíbrios de Nash na prática, quando os agentes têm interesse em coordenar suas decisões, como no caso do jogo de coordenação do padrão tecnológico da Figura 3.6: o conceito de ponto focal, que passamos a discutir brevemente agora.

Selecionando entre Vários Equilíbrios de Nash na Prática: O Conceito de Ponto Focal

Considere novamente o jogo de coordenação do padrão tecnológico da Figura 3.6. Obviamente, na medida em que determinados resultados sejam melhores para todos os agentes, abre-se espaço para a possibilidade de cooperação entre eles, no sentido preciso de coordenar suas ações de forma a garantir o melhor resultado possível para todos.

Será justamente na análise da possibilidade de coordenação de agentes como forma de obter soluções cooperativas, que será definido o conceito de *ponto focal*:

Um **ponto focal** é um elemento que se destaca de um contexto, e que permite aos jogadores coordenarem suas decisões em um dentre vários equilíbrios de Nash possíveis.

Como exemplo de ponto focal, considere o seguinte: imagine dois paraquedistas que, encarregados de uma missão de sabotagem, tenham saltado em determinada região, sem que um saiba onde o outro se localiza, sem equipamentos de comunicação (transmissões de rádio podem estar sendo rastreadas) e sem que tenham acordado antecipadamente onde iriam se encontrar. Apenas sabem que ambos têm a mesma missão e o mesmo mapa (conhecimento da região).

Ainda assim, é razoável supor que os dois paraquedistas terminariam se encontrando, desde que houvesse um elemento do ambiente em que os dois se encontram que se diferenciasse ou se destacasse dos demais, pois, para facilitar

o encontro, sendo racionais, os paraquedistas escolheriam um referencial único e não ambíguo na região.

Imagine então que os dois paraquedistas devem executar sua missão de sabotagem em uma pequena cidade, próxima de onde saltaram. Se a cidade tiver várias casas mais ou menos parecidas, duas escolas também semelhantes e apenas uma igreja, a escolha mais natural é que ambos se encaminhem para a igreja que, por ser única, se destaca do contexto.

Mas note que isso só é possível se os paraquedistas *conhecem a cidade e isso é de conhecimento comum*, ou seja, é do conhecimento de ambos. Isso significa que algum elemento tornou as características da região de conhecimento comum entre os jogadores. Possivelmente, um regime de instrução e treinamento não apenas orientou os paraquedistas a interpretarem o mapa da cidade da mesma forma, como tornou isso de conhecimento de ambos.

Em outros termos, a efetividade do ponto focal como referência para a coordenação dos agentes exige o *compartilhamento de experiências*. Sem que as experiências tenham sido compartilhadas entre os agentes, não há razão para se supor que os diferentes elementos que compõem um dado contexto terão sua proeminência avaliada da mesma forma e que os pontos focais escolhidos serão os mesmos.

Dessa forma, conclui-se que *o conceito de ponto focal como elemento de coordenação espontânea dos agentes se restringe essencialmente a pequenos grupos*, dada a necessidade da familiaridade na interpretação do meio em que interagem. E essa familiaridade somente pode ser obtida por meio de experiências comuns. Não é por acaso que a ideia de ponto focal tem sido aplicada, com algum sucesso, à interação de pequenos grupos, como o de empresas em setores concentrados na formação de um cartel.

Vamos retornar ao caso do jogo de coordenação do padrão tecnológico da Figura 3.6, que reproduzimos novamente, para facilitar a exposição:

	AntiVírus	
SysOp	**Atualizar**	**Não Atualizar**
Desenvolver	2, 1	−1, −2
Não Desenvolver	0, −1	1, 2

Figura 3.6 O Jogo de Coordenação do Padrão Tecnológico

Um exemplo de ponto focal, nesse caso, poderia ser um colunista especializado em uma revista internacional de novidades em tecnologia de informação,

que fosse famoso o suficiente para ser lido por funcionários de ambas as empresas em seus países.

Ao divulgar informações a respeito, por exemplo, do desenvolvimento de novas ferramentas, poderia induzir a coordenação das duas empresas na combinação de estratégias em que a SysOp desenvolveria sua ferramenta e a AntiVírus atualizaria seu programa antivírus. Sendo nosso hipotético colunista internacionalmente famoso, ele se tornaria um ponto focal para as empresas coordenarem suas decisões.

Um Caso em que Não Há Equilíbrio de Nash

Vejamos agora um caso em que não há equilíbrio de Nash. Como exemplo de um jogo em que não há equilíbrio de Nash, considere o jogo conhecido como *jogo de combinar moedas* (*matching pennies*). Nesse jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador dá a sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar a sua moeda para o segundo. Esse jogo está representado a seguir:

	Jogador 2	
Jogador 1	**Cara**	**Coroa**
Cara	1, −1	−1, 1
Coroa	−1, 1	1, −1

Figura 3.8 O Jogo de Combinar Moedas

Não é difícil perceber que no jogo de combinar moedas não há combinação de estratégias que atenda aos requisitos do equilíbrio de Nash. Apenas para citar um exemplo, embora jogar Cara seja a melhor resposta para o Jogador 1 no caso de o Jogador 2 jogar Cara, jogar Cara não é a melhor resposta para o Jogador 2 se o Jogador 1 jogar Cara. A mesma situação se repete em todas as outras combinações de estratégias.[8]

O que isso significa?

---

8 Essa ausência de equilíbrio de Nash resulta do fato de que não estamos admitindo, por enquanto, a possibilidade de estratégias mistas, ou seja, de estratégias em que há uma probabilidade de o jogador mostrar cara ou coroa. Ao tratarmos de estratégias mistas mais adiante neste livro veremos que, quando estratégias mistas são admitidas, sempre poderemos encontrar um equilíbrio de Nash.

Podemos entender esse tipo de jogo, no qual não se verifica um equilíbrio de Nash de forma imediata, como representando aquelas situações em que não há possibilidade de os jogadores se conformarem com uma dada combinação de estratégias. Assim, não haveria possibilidade de os jogadores terminarem acomodados com algum tipo de solução, ainda que intermediária: esse é um jogo de conflito permanente e não há como, diretamente, determinar estratégias que sejam reciprocamente as melhores respostas para cada jogador.

Nem sempre esse tipo de jogo, conhecido como jogo estritamente competitivo ou jogo de soma zero, deixa de apresentar um equilíbrio de Nash. Contudo, o método de determinação do equilíbrio de Nash em jogos estritamente competitivos é diferente e exige um método específico conhecido como *minimax – maximin*. Discutiremos jogos estritamente competitivos no Capítulo 5.

ALGUNS JOGOS IMPORTANTES

É muito comum padronizar determinados tipos de situação de interação estratégica de forma a simplificar e facilitar a sua análise. Desse modo, é comum empregar expressões como "essa é uma situação do tipo dilema dos prisioneiros", ou "aquelas empresas estão vivendo um problema de coordenação como na batalha dos sexos" etc.

Em outras palavras, empregam-se determinados jogos clássicos para resumir as características de alguma situação de interação estratégica, traçando-se paralelos entre esses jogos clássicos e a situação em análise. Eis, portanto, alguns tipos de jogos muito úteis para analisar situações de interação estratégica.

A Batalha dos Sexos: o Problema da Coordenação com Várias Opções

Existem jogos em que os dois jogadores ganham se conseguirem coordenar suas decisões. Um importante jogo de coordenação é a chamada "batalha dos sexos" (um nome inadequado e que se revela infiel ao próprio sentido do jogo, mas que se popularizou na literatura de jogos).

Suponha que um casal está decidindo onde irá se encontrar e qual será o programa que farão para passar a noite. Ambos valorizam mais do que qualquer outra coisa passar juntos a noite, mas Ele (vamos chamar um dos jogadores dessa forma) prefere ir ao futebol a ir ao show de música popular que acontece ao mesmo tempo da partida, enquanto que Ela (o outro jogador) prefere ir ao show de música. O problema é que ambos têm de tentar se encontrar em um desses dois eventos, sem poderem se comunicar (suponha que ambos perderam seus celulares).

A forma estratégica dessa interação pode ser observada na Figura 3.9.

	Ele	
Ela	**Futebol**	**Show**
Futebol	1, 2	−1, −1
Show	−1, −1	2, 1

Figura 3.9 A Batalha dos Sexos

No jogo da batalha dos sexos, os jogadores obtêm uma recompensa maior caso escolham o mesmo programa e consigam se encontrar, ainda que Ela prefira ir ao show a ir ao futebol, e Ele prefira o futebol ao show. O fato é que nenhum dos dois quer fazer seu programa predileto sozinho e, assim, Ele ainda prefere ir ao show com Ela a ir ao futebol sozinho e Ela, da mesma forma, prefere ir ao futebol com Ele a ir sozinha ao show.

O leitor já deve ter percebido que esse jogo apresenta a mesma estrutura do jogo de coordenação do padrão tecnológico, apresentado na Figura 3.6. De fato, o jogo da batalha dos sexos serve como representação geral daquelas situações de interação estratégica em que os jogadores ganham sempre que coordenam suas decisões, mas têm preferências distintas sobre que tipo de coordenação deve ser adotada. Assim, conforme já foi observado, o jogo da batalha dos sexos possui dois equilíbrios de Nash: (Futebol, Futebol) e (Show, Show).

O Dilema dos Prisioneiros: Cooperação Versus *Interesse Próprio*

O dilema dos prisioneiros é, provavelmente, o tipo de jogo mais popular da teoria dos jogos. Suponha que dois ladrões foram presos pela polícia, com algumas evidências circunstanciais (foram vistos rondando de forma suspeita o local do roubo na noite do crime), mas nada muito definitivo.

A polícia então isola cada suspeito em uma sala e faz a cada um dos suspeitos a seguinte proposta: se ele confessar o roubo e seu parceiro não confessar, ele será libertado em razão de sua cooperação com a polícia, enquanto seu parceiro (que não confessou) irá amargar quatro anos na penitenciária estadual.

Se, ao contrário, ele não confessar, mas seu parceiro o fizer, será ele a enfrentar os quatro anos na penitenciária estadual, enquanto seu parceiro será libertado. Caso ambos confessem, a cooperação individual de um deles perde o valor como denúncia do comparsa e ambos enfrentam uma pena de dois anos na prisão estadual (menor do que quatro anos em função da confissão de ambos). Finalmente, embora a polícia não os informe a esse respeito, eles sabem que se nenhum dos dois confessar, ambos serão soltos após um ano de detenção, por vadiagem.

Dadas as características desse processo de interação estratégica, será que algum dos dois ladrões confessará? Para determinar o resultado mais provável do jogo, considere a forma estratégica abaixo, que descreve as recompensas em meses a serem passados na prisão (com sinal negativo para enfatizar o fato de que o tempo na prisão é algo que os ladrões querem minimizar).

	Ladrão 2	
Ladrão 1	**Confessa**	**Não Confessa**
Confessa	−2, −2	0, −4
Não Confessa	−4, 0	−1, −1

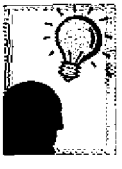
Figura 3.10 O Dilema dos Prisioneiros

Vamos aplicar o conceito de equilíbrio de Nash para determinar o resultado mais provável do jogo representado na Figura 3.10. Podemos ver que a melhor resposta que qualquer um dos dois ladrões pode adotar para a estratégia {Não Confessa} do outro é {Confessa}. Por outro lado, a melhor resposta à estratégia {Confessa} é, também, {Confessa} (que produz dois anos na cadeia, contra quatro anos no caso de {Não Confessa}).

Logo, os dois ladrões, se agirem racionalmente, confessarão o roubo: se um deles escolhesse não confessar, seria prejudicado pelo outro, que anularia sua pena confessando.

É interessante perceber que o resultado obtido no dilema dos prisioneiros é derivado da condição de que os prisioneiros não podem se comunicar. Se pudessem se comunicar, todo o resultado do jogo dependeria de eles poderem, ou não, estabelecer compromissos que pudessem ser garantidos.

Se ambos pudessem estabelecer compromissos garantidos, provavelmente nenhum dos dois confessaria. Pode-se perceber que a possibilidade de estabelecer compromissos garantidos é muito importante para a determinação do resultado do jogo, e nos fornece o critério para distinguir entre **jogos não-cooperativos** e **jogos cooperativos**.



Um jogo é dito **não-cooperativo** quando os jogadores não podem estabelecer compromissos garantidos. Caso contrário, se os jogadores podem estabelecer compromissos, e esses compromissos possuem garantias efetivas, diz-se que o jogo é **cooperativo**.

O dilema dos prisioneiros é o melhor exemplo de que, em determinados processos de interação estratégica, o fato de cada jogador buscar o melhor para si leva a uma situação que não é a melhor para todos. Já vimos um exemplo desses quando discutimos o jogo do comércio internacional: o dilema do prisioneiro nos ajuda a entender as dificuldades enfrentadas quando se tenta reduzir o protecionismo entre países.

O Jogo do "Galinha": Quando a Competição É Destrutiva

O jogo do "galinha" é uma representação esquemática de uma modalidade perigosa de competição entre os adolescentes norte-americanos nos anos 1950, e que foi popularizada no filme de James Dean, *Rebelde sem causa* (1955), embora a descrição mais fiel (ao jogo) seja a do filme *Footloose* (1984), com Kevin Bacon.[9]

Imagine dois adolescentes, James e John, que dirigem seus carros em alta velocidade, um em direção ao outro. O objetivo do jogo é identificar quem desvia primeiro: este será o covarde a ser apelidado de "galinha" pelos companheiros, resultando daí o nome do jogo. O que não se desvia fica com a fama de "durão" (em inglês, *tough*).

Se ambos desviam ao mesmo tempo, ninguém perde o jogo. Porém, se ambos são "durões" e nenhum se desvia, ambos sofrem um acidente gravíssimo, pondo em risco suas próprias vidas. As recompensas simbólicas desse jogo estão descritas na matriz da Figura 3.11:

	John	
James	**Não Desvia**	**Desvia**
Não Desvia	−2, −2	2, −1
Desvia	−1, 2	0, 0

Figura 3.11 O Jogo do "Galinha"

As recompensas do jogo do "galinha" na Figura 3.11 procuram apenas ordenar as preferências dos jogadores, uma vez que é obviamente muito difícil estabelecer valores quando estão envolvidas vidas em risco. Assim, cada jogador prefere não desviar, se o outro desvia. A opção que é preferível em seguida é desviar se o outro também desvia. Pior do que essa escolha é desviar se o outro não desvia, mas a pior combinação de estratégias de todas é não desviar se o

9 Vários autores chamam a atenção para o fato de que, por razões óbvias, esse tipo de jogo era muito mais popular entre os diretores de cinema do que entre os próprios adolescentes.

outro também não desvia. Aplicando o conceito de equilíbrio de Nash vê-se que há dois equilíbrios: (Não Desvia, Desvia) e (Desvia, Não Desvia): se o outro jogador desvia, a melhor resposta é não desviar, e a melhor resposta a não desviar é desviar.[10]

O leitor deve estar recordando que já tratamos de um jogo parecido: o jogo da campanha publicitária da Figura 3.7. Aqui, como lá, falta algo que indique quem irá se desviar, uma vez que não há nenhuma indicação nesse jogo quanto a como os jogadores podem coordenar suas decisões de forma a evitar uma colisão.

O jogo do "galinha" tem sido empregado não apenas para descrever situações no mundo econômico nas quais é melhor evitar o enfrentamento, como também foi muito popular na época da guerra fria entre os Estados Unidos e a antiga União Soviética, para descrever os riscos de um conflito termonuclear e a necessidade de mecanismos que evitassem o confronto.

O Jogo da Caça ao Cervo: O Dilema do Contrato Social

O jogo da caça ao cervo vem se tornando uma forma muito popular entre cientistas sociais que estudam o contrato social[11] por meio da teoria dos jogos. Sua formulação se deve ao filósofo franco-suíço Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), embora Rousseau não tenha apresentado a situação que deu origem ao chamado jogo da caça ao cervo como um "jogo", e sim como um problema.

Na segunda parte de sua obra *Discurso sobre a Origem e os Fundamentos da Desigualdade do Homem* (1754-55), Rousseau discute os primórdios do desenvolvimento da cooperação entre os homens. De acordo com Rousseau, "Ensinando-lhe a experiência ser o amor ao bem-estar o único móvel das ações humanas", o espírito humano "encontrou-se em situação de distinguir as situações raras em que o interesse comum poderia fazê-lo contar com a assistência de seus semelhantes e aquelas, mais raras ainda, em que a concorrência deveria fazer com que desconfiasse deles".[12]

Caso houvesse a possibilidade de ganhos pela cooperação mútua, os homens uniam-se em bandos, ou qualquer outro tipo de associação. Os vínculos nessa situação, todavia, eram frágeis: a cooperação durava apenas enquanto a oportunidade que lhe dera origem existia. O imediatismo prevalecia sobre o planeja-

---

10 Como exercício ao leitor, pede-se demonstrar que esses dois equilíbrios são, cada um deles isoladamente, ótimos de Pareto.

11 Em sua concepção mais usual, o contrato social designa o "contrato" que os indivíduos fariam implicitamente para viver em sociedade. Nesse contrato implícito os indivíduos definiram seus direitos e deveres de forma a tornar possível a vida em sociedade. O Estado seria o agente encarregado de garantir contrato social.

12 Estamos empregando a edição brasileira do *Discurso sobre a Origem e os Fundamentos da Desigualdade entre Os Homens*, da Coleção Os Pensadores (São Paulo, Abril Cultural, 1978). As passagens citadas estão na página 261.

mento a longo prazo e, assim, "longe de se preocuparem com um futuro distante, não pensavam nem mesmo no dia de amanhã".

Desse modo, se o objetivo fosse caçar um cervo, "cada um sentia que para tanto devia ficar em seu lugar, mas, se uma lebre passava ao alcance de um deles, não há dúvida de que ele a perseguiria sem escrúpulos e, tendo alcançado sua presa, pouco se lhe dava faltar a dos companheiros".

A passagem é muito breve, mas deu origem a um jogo muito popular entre os estudiosos da cooperação social. Suponha que dois caçadores se reuniram para caçar um cervo. Sendo um animal de grande porte e muito rápido e ágil, nenhum dos dois caçadores tem qualquer chance de caçá-lo sozinho, necessitando assim da ajuda do outro caçador. Na verdade, na época de Rousseau eram necessários mais do que apenas dois caçadores para caçar um cervo, mas isso não altera o problema que estamos estudando e assim podemos simplificar, supondo que são apenas dois os caçadores envolvidos.

Para que a caçada tenha sucesso, é preciso que cada caçador ocupe sua posição no bosque e mantenha a atenção no cervo. Ocorre que cada caçador também pode aproveitar seu tempo no bosque para caçar uma lebre. A lebre é uma caça mais fácil do que o cervo, pois pode ser capturada por um caçador apenas. Porém, é também uma caça de muito menor valor: uma lebre representa uma quantidade de carne muito menor do que a metade de um cervo.

Por último, se qualquer um dos dois caçadores opta por perseguir a lebre, ele abandona seu posto e o cervo escapa, mas o caçador que capturou a lebre não é obrigado a dividi-la com o outro caçador. Podemos supor que, sendo a lebre pequena, o caçador que a capturou é capaz de ocultá-la do outro caçador com sucesso. Como podemos representar esse jogo?

Vamos supor que metade de um cervo possui três vezes mais valor para os caçadores, dados a quantidade de carne e seu sabor, do que uma lebre. Podemos ver a representação das recompensas de cada jogador para cada combinação de estratégias na forma estratégica da Figura 3.12:

	Caçador B	
Caçador A	**Cervo**	**Lebre**
Cervo	3, 3	0, 1
Lebre	1, 0	1, 1

Figura 3.12 O Jogo da Caça ao Cervo

No jogo da caça ao cervo, representado na forma estratégica da Figura 3.12, se ambos os caçadores permanecem em seus postos atentos ao cervo a caçada é

bem-sucedida e cada um deles tem uma recompensa de 3 (as recompensas são simbólicas, como sempre).

Se qualquer um dos dois deixa o seu posto para caçar uma lebre, enquanto o outro caçador permanece em seu posto vigiando o cervo, o caçador que permaneceu em seu posto nada caça (recompensa de 0), ao passo que o caçador que saiu do seu posto para caçar a lebre consegue caçá-la, obtendo uma recompensa de 1 (estamos supondo que para qualquer um dos dois caçadores a lebre equivale a 1/3 do valor do cervo). Por fim, se os dois deixam seus postos para caçar lebres, ambos retornam para casa com uma lebre cada um.

O leitor já deve ter percebido que há dois equilíbrios de Nash no jogo da caça ao cervo: ou os dois caçadores se mantêm fiéis a seus postos e cada um obtém uma grande recompensa (metade do cervo), ou os dois abandonam seus postos, e cada um obtém uma recompensa significativamente menor (uma lebre cada um).

O jogo da caça ao cervo representa, portanto, aquelas situações de interação estratégica em que:

- O melhor resultado depende da cooperação de todos.
- Se alguém buscar um resultado individual mais imediato, aqueles que se mantiverem fiéis ao compromisso inicial serão prejudicados.

Há várias situações na sociedade que podem ser descritas como um jogo de caça ao cervo. Considere uma sociedade comercial entre dois sócios. Se o leitor fosse um dos sócios dessa hipotética sociedade comercial, muito provavelmente admitiria que somente valeria a pena se esforçar pelo sucesso da sociedade se o outro sócio também se esforçar. Se a expectativa for de que outro sócio não irá se esforçar muito, provavelmente o leitor rapidamente concluirá que não vale a pena se esforçar além do mínimo necessário, ainda que isso signifique um menor ganho para ambos. Sendo racional, o outro sócio seguiria o mesmo raciocínio.

O jogo da caça aos cervos indica assim situações nas quais o melhor resultado para todos somente é conseguido quando todos acreditam que todos irão se esforçar de acordo com o compromisso original, em vez de buscar ganhos imediatos que podem prejudicar aqueles que se mantiverem fiéis ao que foi acordado inicialmente. É fácil ver que dos dois equilíbrios de Nash do jogo de caça aos cervos da Figura 3.12, apenas aquele em que os dois jogadores optam por permanecerem fiéis ao compromisso de caça ao cervo é um ótimo de Pareto.

Há vários outros tipos de jogos além da batalha dos sexos, do dilema dos prisioneiros, do jogo do "galinha" e do jogo de caça ao cervo. Esses tipos que acabamos de ver, contudo, são imprescindíveis para a análise econômica e social.

EXERCÍCIOS

3.1 Determine o equilíbrio a partir da forma estratégica dos jogadores A (linhas) e B (colunas) a seguir, utilizando a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

	B(1)	B(2)	B(3)	B(4)
A(1)	3, 0	1, 1	5, 4	0, 2
A(2)	1, 1	3, 2	6, 0	2, −1
A(3)	0, 2	4, 4	7, 2	3, 0

3.2 Considere o seguinte jogo:

	i	ii	iii
I	1, 1	1, ½	2, 0
III	1, 0	0, 1	2, 2

Pede-se:

a. Determinar quantos equilíbrios de Nash há no jogo.
b. Verificar que ao eliminar uma estratégia fracamente dominada, elimina-se também um dos equilíbrios de Nash do jogo.

3.3 Considere a seguinte forma estratégica para os jogadores S (linhas) e s (colunas):

	s'	s''
S'	3, 3	0, 1
S''	1, 1	2, 3

Pede-se:

a. Determinar se existe alguma estratégia estritamente dominante para algum jogador.
b. Determinar se existe algum equilíbrio de Nash. Caso exista mais de um equilíbrio, determinar quantos e quais são.
c. Determinar, caso existam equilíbrios de Nash, se são ótimos de Pareto.

3.4 A partir da forma estratégica a seguir para o jogador nas linhas e para o jogador nas colunas determine:

	1	2
I	3, 2	4, 3
II	1, 0	5, 2

a. Se algum jogador possui alguma estratégia dominante.
b. Se existe algum equilíbrio de Nash; caso exista, quantos.
c. Caso exista um equilíbrio de Nash, se ele é ótimo de Pareto.
d. Caso exista um equilíbrio de Nash, se ele é estrito.

3.5 Considere o jogo a seguir entre os jogadores α e β:

	β_1	β_2
α_1	2, 4	0, 0
α_2	1, 2	6, 3

Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas, justificando:

a. A estratégia α_2 é dominante para o jogador α.
b. (α_2, β_2) é o único equilíbrio de Nash.
c. Não há equilíbrio com estratégias dominantes.
d. Esse é um jogo do tipo "guerra dos sexos".

3.6 Considere o jogo simultâneo entre dois agentes, apresentado a seguir:

	Agente 2	
Agente 1	**c**	**d**
a	5, 5	0, 10
b	10, 0	1, 10

Indique quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando sua resposta:

a. A combinação de estratégias (a, d) é um equilíbrio de Nash desse jogo.
b. O jogo possui um único equilíbrio de Nash.
c. b é uma estratégia dominante para o agente 1.
d. Esse é um jogo do tipo jogo do "galinha".

3.7 Considere o jogo descrito pela seguinte forma estratégica:

	Agente 2	
Agente 1	**a**	**b**
A	3, 2	5, 5
B	0, 0	7, 4

Verifique quais das afirmações a seguir são verdadeiras:
a. As estratégias B e b são dominantes para os agentes 1 e 2, respectivamente.
b. O par de estratégias (B, b) é um equilíbrio de Nash.
c. O par de estratégias (A, b) é eficiente no sentido de Pareto.
d. Todo equilíbrio de Nash desse jogo é eficiente no sentido de Pareto.

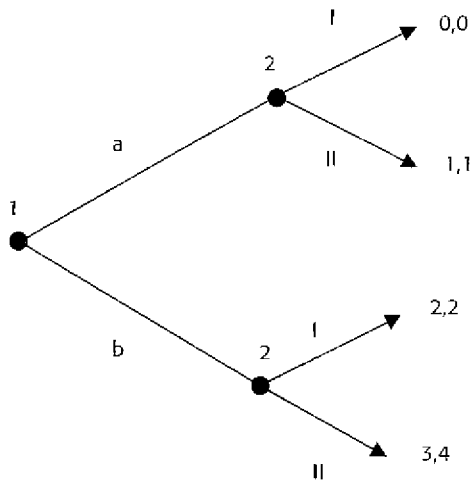
3.8 Dado o jogo seguinte, considere as afirmativas e indique quais são falsas e quais são verdadeiras, justificando suas respostas:

Jogador 1	Jogador 2	
	x	*y*
a	15, 0	15, 1
b	−10, 0	50, 1

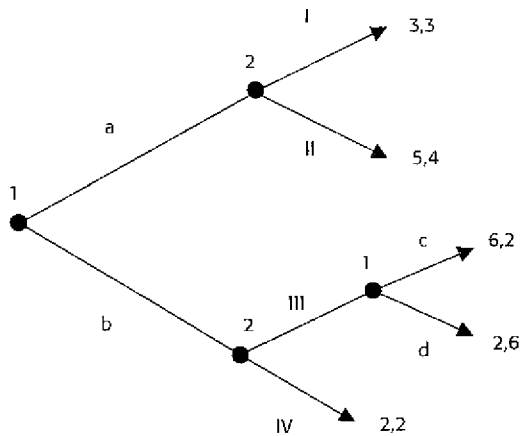
a. Em relação ao jogo descrito na matriz anterior, pode-se afirmar que as estratégias *a* e *y* são dominantes.
b. Pode-se afirmar que o par (b, y) constitui um equilíbrio de Nash.
c. Não há equilíbrio de Nash nesse jogo.
d. Todo equilíbrio de Nash nesse jogo é ótimo de Pareto.
e. Há um equilíbrio de Nash: (a, x) que, no entanto, não é um equilíbrio de Nash estrito.

3.9 Reveja o capítulo anterior no tópico sobre modelagem de jogos e identifique os equilíbrios de Nash dos jogos a seguir examinando-os na forma estratégica:

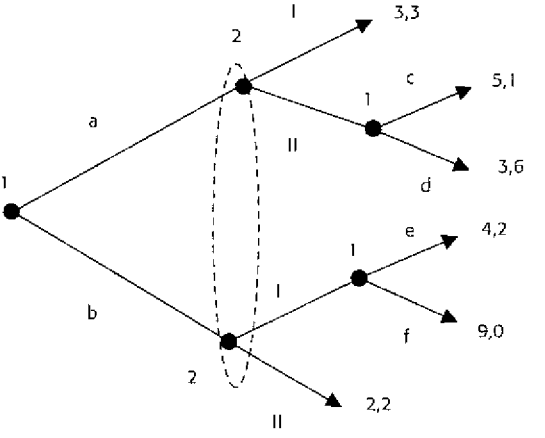
a.



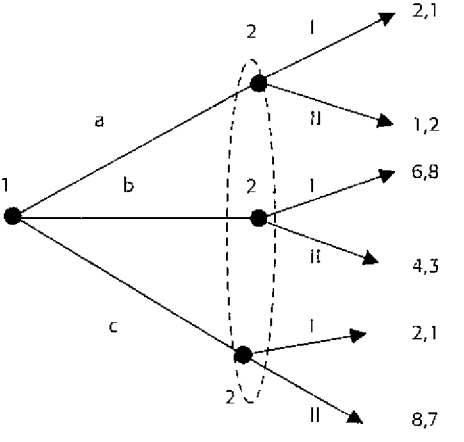
b.



c.



d.



3.10 Indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas, justificando:

a. Em relação à teoria dos jogos, pode-se dizer que o "dilema dos prisioneiros" ocorre quando o equilíbrio de Nash não é um equilíbrio em estratégias dominantes.

b. Todo equilíbrio de Nash em um jogo simultâneo é ótimo de Pareto.

c. Todo equilíbrio de Nash é um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes.

d. Toda estratégia não-racionalizável é estritamente dominada.

e. Todo equilíbrio em estratégias estritamente dominantes é também um equilíbrio de Nash.

4

Aplicando o Equilíbrio de Nash: Interagindo Estrategicamente

Não é que as pessoas estejam contra você.
É que elas estão a favor delas próprias.

GENE FOWLER, BIÓGRAFO E JORNALISTA NORTE-AMERICANO (1890-1960)

INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordaremos algumas das mais conhecidas aplicações do conceito de equilíbrio de Nash para a compreensão do comportamento das empresas em mercados, com ênfase no comportamento de empresas em mercados concentrados (embora, ao discutirmos o problema dos recursos em comum, abordemos algumas dificuldades que um mercado excessivamente "aberto" pode causar). Também discutiremos uma interessante aplicação do equilíbrio de Nash a disputas eleitorais.

Aplicaremos o conceito de equilíbrio de Nash para estudar o que pode acontecer em uma situação de interação estratégica em que os jogadores estiverem buscando o melhor para si. Teremos a oportunidade de analisar situações em que, não obstante cada jogador esteja apenas buscando o melhor para si mesmo, o resultado final para todos é o pior possível. Esse resultado algumas vezes paradoxal foi percebido pelo jornalista norte-americano Gene Fowler, de quem tomamos a epígrafe que inicia este capítulo.

Contudo, para seguirmos com nosso estudo temos de abandonar uma limitação importante: até aqui tratamos as escolhas estratégicas dos jogadores como decisões sobre variáveis discretas. Por exemplo, ao estudarmos o jogo do comércio internacional vimos que os países podiam estabelecer apenas dois tipos de tarifa: "baixa" ou "alta". Embora algumas vezes essa simplificação não altere a essência do argumento, ela limita dramaticamente as possibilidades de análise.

Somente para citar um caso óbvio em que a hipótese de estratégias discretas limita a análise, diante da ameaça de entrada de um novo competidor no mercado, as empresas estabelecidas não possuem como escolha somente manter ou reduzir o preço a um dado nível: elas podem reduzir os preços em um contínuo de valores.

Como a escolha do preço é a variável estratégica em questão, nesse caso as empresas estabelecidas dispõem de *estratégias contínuas*, uma vez que as variáveis de escolha estratégica variam continuamente.

Em outras palavras, o modelo de jogo mais adequado para tratar desse tipo de situação é um **jogo simultâneo de estratégias contínuas**. Um primeiro exemplo de jogo simultâneo com estratégias contínuas que veremos é o modelo clássico de Cournot.

O MODELO DE COURNOT (OU DE DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DE QUANTIDADES)

O modelo de Cournot deriva seu nome do matemático, filósofo e economista francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877), que publicou em 1838 uma análise do comportamento de duas empresas que decidiam *simultaneamente* que quantidade produzir. Alguns autores consideram sua análise um primeiro ensaio do método que seria depois elaborado e refinado na forma da teoria dos jogos.

O que é certo, contudo, é que esse modelo é um dos modelos clássicos de análise de mercados com poucas empresas, ou *oligopólios*, e por isso merece ser estudado com atenção. Estudaremos duas diferentes versões desse modelo: uma versão com apenas duas empresas e uma versão com mais de duas empresas.

O Modelo de Cournot com Duas Empresas

Nesse jogo temos dois jogadores: Empresa 1 e Empresa 2. As duas empresas fabricam produtos homogêneos, disputando, portanto, o mesmo mercado. Diz-se que dois produtos fabricados por empresas diferentes são homogêneos quando os consumidores não percebem diferenças na qualidade dos dois produtos e, portanto, baseiam suas decisões sobre qual produto adquirir considerando apenas o preço, independentemente do fabricante.

Como hipótese de comportamento, adotaremos o pressuposto de que cada empresa busca maximizar seu lucro, que, nesse jogo, é a recompensa. O lucro de cada empresa é a diferença entre sua receita e seus custos. Desse modo, temos de definir

a receita e os custos de cada empresa, de forma a construir uma **função de recompensa** para cada uma delas.

Vamos iniciar a função de recompensa pela receita de cada empresa. A receita é o produto do preço de mercado pela quantidade vendida por cada empresa. Para simplificar, vamos supor que o preço de mercado é dado por uma função de demanda linear, do tipo:

$$p(q) = A - b(q_1 + q_2)$$

Onde $p(q)$ é o preço de mercado como função da quantidade, q é a quantidade total produzida e vendida no mercado, A e b são constantes, q_1 é a quantidade produzida e vendida pela Empresa 1, e q_2 é a quantidade produzida e vendida pela Empresa 2. Obviamente, $q = q_1 + q_2$.

A receita total de uma empresa é o produto do preço de mercado pela quantidade produzida e vendida. Segue-se então que as receitas totais da Empresa 1 (RT_1) e da Empresa 2 (RT_2) são dadas, respectivamente, por:

$$RT_1 = p(q)q_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2$$
$$RT_2 = p(q)q_2 = Aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2$$

Para chegarmos à função de recompensa de cada empresa temos de subtrair das receitas os custos, de forma a obter os lucros de cada empresa. Vamos supor, também para simplificar, que as funções custo das duas empresas (C_1 e C_2) são idênticas, e dadas por:

$$C_1 = cq_1$$
$$C_2 = cq_2$$

Onde c é uma constante estritamente maior que zero. Não é indispensável ao modelo de Cournot supor que as empresas possuem os mesmos custos, como estamos fazendo. Mas essa hipótese simplificadora permite obter algumas relações muito interessantes. Nos exercícios, no final deste capítulo, o leitor poderá desenvolver o modelo de Cournot para o caso em que as empresas têm funções de custo diferentes.

Agora podemos escrever a função de recompensa de cada empresa, ou seja, seus lucros, (π_1 e π_2) como sendo:

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$$
$$\pi_2 = Aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2 - cq_2$$

O passo seguinte é tomar a primeira derivada de cada uma das equações anteriores e igualar a zero, de acordo com a condição de primeira ordem para maximização:[1]

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = A - 2bq_1 - bq_2 - c = 0$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = A - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$$

Colocando q_1 e q_2 em evidência em $\partial\pi_1/\partial q_1$ e $\partial\pi_2/\partial q_2$, temos então duas novas equações:

$$q_1 = \frac{A - bq_2^e - c}{2b}$$
$$q_2 = \frac{A - bq_1^e - c}{2b}$$

As duas equações descrevem quanto cada uma das empresas irá produzir para maximizar seus lucros, dada a produção esperada de sua concorrente (o fato de a quantidade produzida ser a esperada é indicado pelo superíndice *e*).

Por que a produção esperada e não a efetiva? Porque cada empresa toma sua decisão sobre quanto produzir *sem conhecer a decisão da outra empresa* (lembre-se de que se trata de um jogo simultâneo!); portanto, somente pode utilizar como parâmetro o valor esperado da produção da outra empresa. As duas equações nos dão as **funções de reação** das Empresas 1 e 2, respectivamente. Dado esse valor esperado, a empresa escolhe a quantidade que maximiza seus lucros. Em outras palavras, a quantidade que ela irá produzir será sua melhor *resposta* à decisão que ela espera que sua concorrente tome.

Vamos voltar agora ao conceito de equilíbrio de Nash: de acordo com esse conceito, para atingir um equilíbrio, as estratégias dos jogadores devem ser as melhores respostas umas das outras. Assim, q_1 deve ser igual a q_1^e, e q_2 deve ser igual q_2^e: em outras palavras, a estratégia adotada por cada empresa (a quantidade que decidiu produzir) deve ser igual ao que a outra empresa esperava dela, e vice-versa.

Algebricamente, isso significa resolver as duas equações anteriores como um sistema em que $q_1 = q_1^e$ e $q_2 = q_2^e$. Isso nos leva a:

---

1 Vamos admitir que a condição de segunda ordem para um máximo é satisfeita, sem examiná-la. O leitor curioso pode testar se isso é verdade para esse caso.

$$q_1^* = \frac{A-c}{3b}$$

$$q_2^* = \frac{A-c}{3b}$$

O asterisco (*) sobre os valores de q_1^* e q_2^* indica que se tratam de valores que correspondem a equilíbrios de Nash. Para esses valores, nenhum dos dois jogadores tem qualquer incentivo para alterar suas estratégias, porque uma é a melhor resposta à outra, e vice-versa. A consistência entre o equilíbrio no modelo de Cournot e a noção de equilíbrio do conceito de Nash levou alguns autores a chamarem esse equilíbrio de Cournot-Nash, para enfatizar a coerência entre as duas análises, conforme vimos no primeiro capítulo.

Assim como chegamos a esse resultado algebricamente, também poderíamos chegar a ele geometricamente, traçando as funções de reação das duas empresas em um gráfico cartesiano.

No Gráfico 4.1, temos as duas funções de reação das duas empresas, e o equilíbrio de Nash (q_1^*, q_2^*) identificado por meio da interseção das duas funções de reação. Nela, as estratégias adotadas pelos jogadores são consistentes e, assim, são reciprocamente *as melhores respostas* possíveis dentre o contínuo de quantidades que cada empresa pode escolher.

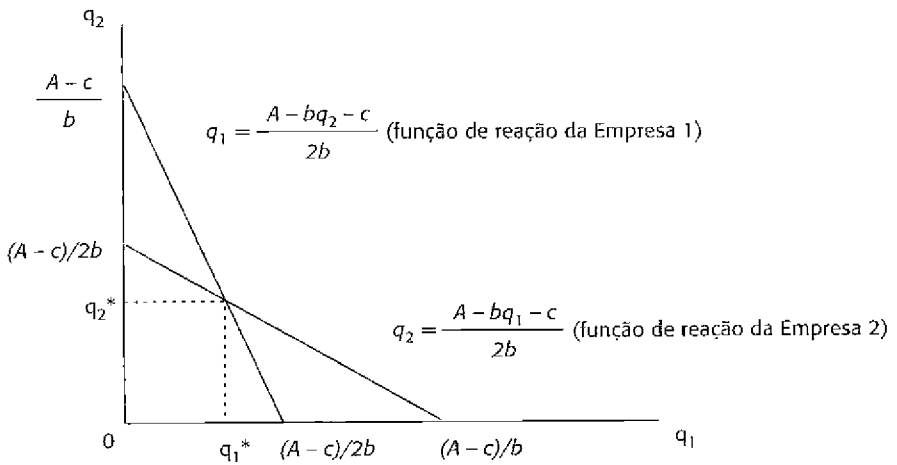


Gráfico 4.1 Funções de Reação do Modelo de Cournot

Agora vamos retomar a discussão anterior, acerca do fato de que não há nada que obrigue um equilíbrio de Nash a ser também Pareto-eficiente. Devemos agora investigar se o equilíbrio de Nash obtido no modelo de Cournot é ou não Pareto-eficiente.

O Modelo de Cournot e a Eficiência de Pareto: O Cartel

Devemos nos perguntar se o equilíbrio obtido no modelo de Cournot é Pareto-eficiente, ou seja, se é um ótimo de Pareto. A forma de responder a essa pergunta é muito simples: devemos investigar se existe alguma outra possibilidade de interação estratégica em que pelo menos uma das duas empresas aumente seus lucros sem que a lucratividade da outra empresa se reduza. Na verdade, veremos que há uma situação em que a lucratividade das duas empresas aumenta simultaneamente: o caso em que as empresas formam um *cartel*.

Para avaliarmos se o equilíbrio de Nash no modelo de Cournot é ou não Pareto-eficiente, vamos considerar um exemplo numérico. Suponha, assim, um mercado em que duas empresas, a Empresa 1 e a Empresa 2, atuam, ambas fabricando um produto homogêneo – digamos, cimento.

Cimento é um bom exemplo de produto homogêneo, uma vez que suas características são objeto de normatização técnica e, desse modo, em geral a única preocupação dos consumidores está relacionada ao preço do cimento, e não à qual empresa fabricou o produto.

Vamos supor, portanto, que a curva de demanda do mercado de cimento é dada por:

$$p = 100 - q_1 - q_2$$

Onde q_1 é a quantidade de cimento produzida e vendida pela Empresa 1, e q_2 é a quantidade de cimento produzida e vendida pela Empresa 2. Contudo, agora estamos supondo que as empresas atuam como um cartel, isto é, estamos supondo que elas formaram uma **coalizão**, ou seja, se comportam como uma empresa monopolista, fixando a quantidade que irão produzir conjuntamente.

Diz-se que empresas formaram uma *coalizão* quando elas coordenam sua produção ou seus preços. Um cartel é um grupo de empresas competidoras que fizeram uma coalizão, de forma a maximizar seus lucros, comportando-se como se fossem uma empresa monopolista.

Um cartel se caracteriza pela maximização conjunta dos lucros das empresas envolvidas. Portanto, o primeiro passo é conhecer a *receita total do cartel*. Como o cartel visa à maximização dos lucros conjuntos das empresas, a receita total do cartel é formada pela soma das receitas das duas empresas. Assim, se chamarmos a receita total do cartel de RT_C, a receita da Empresa 1 de RT_1 e a receita total da Empresa 2 de RT_2, teremos que:

$$RT_C = RT_1 + RT_2$$

Ou, de forma equivalente:

$$RT_C = p(q_1 + q_2)q_1 + p(q_1 + q_2)\,q_2 = p(q_1 + q_2)\,(q_1 + q_2)$$

Resta agora definir as funções de custos das duas empresas, que irão compor os custos do cartel. Vamos supor que as duas empresas que irão compor o cartel possuem as mesmas funções de custo. Assim, temos que os custos da Empresa 1, C_1, e da Empresa 2, C_2, são dados por:

$$C_1 = 4q_1$$

e

$$C_2 = 4q_2$$

Assim, o custo total do cartel, a que chamaremos de C_C, é dado por:

$$C_C = C_1 + C_2 = 4q_1 + 4q_2$$

O leitor deve notar que não faz diferença em qual das duas empresas o cartel aloca sua produção: em qualquer uma delas, a produção de uma unidade a mais significa um acréscimo de 4 reais ao custo total do cartel. Portanto, não faz diferença, *nesse caso*, do ponto de vista dos lucros do cartel, se a unidade é produzida na Empresa 1 ou na Empresa 2. Podemos ter então:[2]

$$q_i^C = q_1 = q_2$$

Onde q_i^C representa a produção de qualquer uma das duas empresas no cartel. Desse modo, podemos escrever a função de custo total desse cartel como sendo:

$$C_c = 4q_i^C + 4q_i^C = 8q_i^C$$

Também podemos reescrever a função de receita total do cartel como:

---

2 É importante destacar que somente pudemos igualar as duas quantidades porque as duas empresas possuem as mesmas funções de custo. Caso as empresas tivessem custos diferentes, não poderíamos fazer $q_C = q_1 = q_2$. O exercício 4.4 deste capítulo trata de um caso em que as empresas que formam o cartel possuem funções de custos diferenciadas.

$$RT_C = p(q_1 + q_2)\,(q_1 + q_2) = (100 - q_1 - q_2)\,(q_1 + q_2)$$
$$= (100 - q_i^C - q_i^C)\,(q_i^C + q_i^C)$$

Ou:

$$RT_C = (100 - 2q_i^C)\,(2q_i^C)$$

A função de lucro do cartel é então dada por:

$$\pi_C = (100 - 2q_i^C)\,(2q_i^C) - 8q_i^C$$

A partir daí somente precisamos calcular a quantidade a ser produzida por cada empresa que maximizará os lucros do cartel. Para isso aplicamos a condição de primeira ordem de maximização, igualando a primeira derivada à zero:

$$\frac{\partial \pi_C}{\partial q_i^C} = 200 - 8q_i^C - 8 = 0$$

Ou seja:

$$q_i^C = \frac{192}{8} = 24$$

Dessa forma, cada empresa produzirá 24 unidades caso forme uma coalizão, isto é, um cartel. A produção total do cartel será, portanto, de 48 unidades.

O cartel realmente aumentou o lucro das empresas? Vamos, inicialmente, calcular os lucros do cartel. O preço de mercado no caso da coalizão entre as duas empresas será:

$$p(q_1 + q_2) = p(q_i^C + q_i^C) = p(2q_i^C) = 100 - 24 - 24 = 100 - 48 = \text{R\$52}$$

Dado o preço de 52 reais e a quantidade produzida por cada empresa de 24 unidades o lucro de cada empresa no cartel (π_i^C) será de:

$$\pi_i^C = p(2q_i^C)q_i^C - 4q_i^C = 52 \times 24 - (4 \times 24) = \text{R\$ } 1.152$$

Vamos agora comparar os lucros do cartel com o equilíbrio de Cournot para esse exemplo. Sabemos que, no equilíbrio de Cournot:

$$q_1^* = \frac{A - c}{3b}$$

e

$$q_2^* = \frac{A-c}{3b}$$

É fácil ver que no caso que estamos estudando:

$$q_1^* = \frac{100-4}{3(1)} = \frac{96}{3} = 32$$

e

$$q_2^* = \frac{100-4}{3(1)} = \frac{96}{3} = 32$$

Com isso, o preço de mercado é dado por:

$$p(q_1^* + q_2^*) = 100 - 32 - 32 = 100 - 64 = \text{R\$ } 36$$

E o lucro de qualquer uma das duas empresas no equilíbrio de Cournot, ao qual chamaremos de π_i, é dado por:

$$\pi_i = 36 \times 32 - (4 \times 32) = 1.152 - 128 = \text{R\$ } 1.024$$

Trata-se de um valor inferior aos 1.152 reais que encontramos no caso de as empresas decidirem formar um cartel. Assim, do ponto de vista das empresas, o equilíbrio de Nash do modelo de Cournot é Pareto-ineficiente: é possível, por meio de uma coalizão, isto é, de um cartel, aumentar os lucros das duas empresas ao mesmo tempo.

O leitor não deve concluir em função de o cartel apresentar um resultado melhor em termos de lucratividade do que a competição do modelo de Cournot, que as empresas sempre irão formar cartéis. Em primeiro lugar, em um grande número de países cartéis são proibidos legalmente, o que pode dificultar severamente esse tipo de prática. Em segundo lugar, como teremos oportunidade de observar no Capítulo 7, ao discutirmos jogos repetidos, o cartel tende a ser muito *instável*, a não ser que algumas condições específicas se verifiquem. Isso porque, não obstante as empresas aumentarem seus lucros com o cartel, veremos que frequentemente elas ganham ainda mais desrespeitando o cartel, o que gera problemas de cooperação.

O modelo de Cournot também pode ser estendido para o caso com mais de duas empresas. Com efeito, a extensão do modelo de Cournot para uma situação com muitas empresas produz um resultado muito interessante, que veremos a seguir.

O Modelo de Cournot com Mais de Duas Empresas

Um exercício interessante é analisar o mesmo modelo, com produtos homogêneos, para o caso em que existem não apenas duas, mas n empresas. O preço de mercado é dado agora por uma função de demanda linear do tipo:

$$p(q) = A - b\sum_{i=1}^{n} q_i$$

Onde $p(q)$ é o preço de mercado como função da quantidade total produzida e vendida q. Temos ainda que $q = \sum_{i=1}^{n} q_i$, isto é, a quantidade total é composta pelo somatório das quantidades produzidas por cada empresa, q_i, com $i = 1, 2, ..., n$. Finalmente, A e b, como no caso anterior, são constantes.

A receita total de uma empresa i qualquer é o produto do preço de mercado pela quantidade produzida e vendida pela empresa. Segue-se então que a receita total de uma empresa i (RT_i) é dada por:

$$RT_i = p(q)q_i = Aq_i - bq_i^2 - q_i b\sum_{j=i}^{n} q_j$$

O leitor deve atentar para essa expressão de RT_i. A expressão é muito parecida com a expressão de RT_1 e RT_2, diferindo apenas pela expressão $\sum_{j=i}^{n} q_j$. Essa expressão indica tratar-se do somatório da produção de todas as empresas *que não* a empresa i, daí o subíndice $j \neq i$, significando que estamos considerando todas as empresas j que não a empresa i.

Desse modo, quando multiplicamos $b\sum_{j=i}^{n} q_j$ por q_i, temos o equivalente, para o caso de muitas empresas, do termo bq_1q_2 em RT_1 e RT_2.

Para chegarmos à função de recompensa de cada empresa temos de subtrair os custos das receitas. Vamos supor, para simplificar, que as funções custo das duas empresas (C_1 e C_2) são novamente dadas por:

$$C_1 = cq_1$$
$$C_2 = cq_2$$

Onde c é uma constante tal que $c > 0$. A hipótese de que as empresas possuem custos iguais permite estender os resultados diretamente de uma empresa para outra, o que, mais uma vez, não é necessário, mas simplifica bastante a compreensão de algumas relações muito importantes.

Agora podemos escrever a função de recompensa de uma empresa *i qualquer* (π_i) como sendo:

$$\pi_i = Aq_i - bq_i^2 - q_i b\sum_{j\neq i}^{n} q_j - cq_i$$

O passo seguinte é tomar a primeira derivada da equação anterior e igualar a zero, de acordo com a condição de primeira ordem para maximização:[3]

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - 2bq_i - b\sum_{j\neq i}^{n} q_j - c = 0$$

Como todas as empresas possuem os mesmos custos marginais (iguais a c) e produzem bens homogêneos (o que significa que se defrontam com a mesma curva de demanda), é razoável supor que dividirão o mercado igualmente entre si.

Isso significa que as quantidades produzidas serão iguais e, desse modo, a expressão $b\sum_{j\neq i}^{n} q_j$ se converte simplesmente em $b(n-1)q_i$: como todas estão produzindo a mesma quantidade, temos que $q_i = q_j$ para todo j e, como na expressão $\sum_{j\neq i}^{n} q_j$ estamos somando as produções de todas as empresas exceto a empresa i, segue-se que temos a soma de $(n-1)$ quantidades produzidas, idênticas à quantidade produzida por i.

Portanto, a expressão anterior pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - 2bq_i - b(n-1)q_i - c = 0$$

Ou ainda:

$$A - b(n+1)q_i - c = 0$$

Podemos facilmente agora encontrar a quantidade de equilíbrio a ser produzida por uma empresa i qualquer, q_i^*, como sendo:

$$q_i^* = \frac{A-c}{b(n+1)}$$

É fácil perceber que, a partir da fórmula anterior, chegamos à mesma expressão que tínhamos obtido para o caso de duas empresas, substituindo n

3 Como sempre, vamos admitir que a condição de segunda ordem para um máximo é satisfeita, sem examiná-la.

por 2. A vantagem dessa expressão é que ela é mais geral.[4] E, por ser mais geral, permite ilustrar uma propriedade muito interessante do modelo de Cournot.

Considere novamente a última expressão. Como todas as empresas produzem e vendem as mesmas quantidades, para sabermos qual será a quantidade total ofertada no mercado, q, apenas temos de multiplicar q^*_i pelo número de empresas, isto é, n. Obtemos assim:

$$q = nq_i^* = \frac{n(A-c)}{b(n+1)}$$

A expressão anterior nos fornece a produção total do setor com n empresas. Assim, em um setor com 3 empresas produzindo produtos homogêneos, todas com idênticas funções de custo $C(q_i) = 4q_i$ e função linear de demanda $p(q) = 100 - \Sigma q_i$, teremos $A = 100$, $b = 1$, $c = 4$ e $n = 3$, logo, cada empresa produzirá, no equilíbrio, uma quantidade igual a:

$$q_i^* = \frac{100-4}{1(3+1)} = \frac{96}{4} = 24$$

A produção total do setor será de $3 \times 24 = 72$ unidades e o preço de mercado será $100 - 72 = 28$. Cada empresa obtém um lucro de $(28 \times 24) - (4 \times 24) = 672 - 96 = 576$.

O que aconteceria se, em vez de 3 empresas, no setor existissem 23 empresas? A quantidade de equilíbrio produzida por cada empresa seria, agora, de apenas quatro unidades. Apesar de a produção individual de cada empresa ser significativamente menor nesse caso, a produção total do setor é maior: $4 \times 23 = 92$. Com isso, o preço de mercado é menor: $100 - 92 = 8$, e o lucro que cada empresa obtém também é menor: $(8 \times 4) - (4 \times 4) = 32 - 16 = 16$.

Assim, se continuássemos aumentando indefinidamente o número de empresas, chegaríamos a um ponto em que o preço seria igual a 4, ou seja, seria igual ao custo adicional de produzir mais uma unidade de produto (o parâmetro c, na função $C(q_i) = 4q_i$), e os lucros das empresas se reduziriam a zero (ao mesmo tempo em que a oferta do setor atingiria seu máximo). Essas, todavia, são as características de um mercado perfeitamente competitivo! Assim, o modelo de Cournot com um número muito grande de empresas é equivalente a um mercado perfeitamente competitivo.

---

4 Embora se limite a funções lineares. As fórmulas apresentadas nesta seção têm como função apenas facilitar a compreensão de algumas propriedades do modelo de Cournot. Mais importante do que as fórmulas, contudo, é que o leitor entenda o procedimento para a construção das funções de reação das empresas, seja com funções lineares ou não.

Outro modo de vermos isto é observando a função que nos fornece a quantidade total ofertada em um mercado, que desdobramos em dois termos:

$$q = \left[\frac{(A-c)}{b}\right]\left[\frac{n}{(n+1)}\right]$$

Calculando o limite do segundo termo entre colchetes, [n/(n + 1)], quando n tende a infinito, concluímos que esse valor se aproxima muito de 1. Desse modo, para um número muito grande de empresas, a expressão anterior se resume a:

$$q = \frac{A-c}{b}$$

Por outro lado, quando um setor é perfeitamente competitivo, isso significa que as empresas produzem até que o preço de mercado se iguale ao custo adicional de produzir mais uma unidade. No nosso exemplo, isso significa que $p(q) = c$. Como $p(q) = A - bq$, obtemos assim o mesmo resultado que o modelo de Cournot quando o número de empresas tende ao infinito, ou seja:

$$c = A - bq \therefore q = \frac{A-c}{b}$$

Portanto, como a quantidade produzida pelas empresas no modelo de Cournot com um número muito grande de empresas tende a igualar-se à quantidade produzida pelas empresas sob a hipótese de concorrência perfeita, os preços de mercado nos dois modelos também convergem. Assim, podemos afirmar que o modelo de Cournot com um número muito grande de empresas converge para o modelo de concorrência perfeita.

Não é difícil perceber a lógica econômica por trás desse resultado. Com efeito, as empresas no modelo de Cournot decidem simultaneamente que quantidade produzir, isto é, sem observar as quantidades que serão produzidas pelas demais empresas. Assim, são obrigadas a tomar as quantidades das demais empresas como dadas, exatamente como no modelo de mercado perfeitamente competitivo.

Desse modo, se aumentarmos suficientemente o número de empresas de forma a expandir a oferta até que o preço de venda se aproxime do custo adicional de produzir mais uma unidade, o resultado final fatalmente será muito próximo do modelo perfeitamente competitivo.

Até aqui discutimos um jogo simultâneo de duas empresas, um duopólio, em que as empresas fixam simultaneamente as *quantidades* a serem produzidas.

Veremos agora um modelo em que duas empresas fixam simultaneamente os *preços* de seus produtos. Esse gênero de modelo é conhecido como modelo de Bertrand.

O MODELO DE BERTRAND (OU DE DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DE PREÇOS)

Um outro modelo de jogo simultâneo clássico na análise de mercados é o modelo conhecido como modelo de Bertrand – que derivou seu nome do matemático francês Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) –, também conhecido como modelo de determinação simultânea de preços (para contrastar com o modelo de determinação simultânea de quantidades – o modelo de Cournot).[5]

Vamos estudar o modelo de Bertrand em duas versões distintas: na primeira versão, duas empresas operam sem restrição de quantidade; na segunda versão, as duas empresas operam com restrição de capacidade produtiva.

O Modelo de Bertrand sem Restrição de Capacidade

Considere novamente duas empresas produzindo bens homogêneos (o que equivale a dizer que os consumidores não percebem diferença entre os produtos das duas empresas) e estabelecendo seus preços *simultaneamente*. Como os consumidores não percebem diferença entre os dois produtos, se uma empresa estabelece um preço superior ao preço da outra, as vendas da empresa com preço mais alto se reduzem a zero. Se os preços forem iguais, as empresas dividem o mercado igualmente.

Admita que cada empresa possa sozinha atender a todo o mercado, caso seja necessário, desde que o preço seja igual ou maior do que o custo marginal de produção. Qual será o preço de equilíbrio a ser fixado pelas empresas?

Para poder compreender melhor as várias opções estratégicas de que as empresas dispõem, vamos estabelecer as funções de recompensa para um exemplo ilustrativo. Suponha que a curva de demanda do mercado em que as duas empresas atuam é dada por:

$$q(p) = 100 - p$$

Note que nesse caso estamos expressando a quantidade demandada em função do preço, enquanto no modelo de Cournot estávamos expressando

5 Esse modelo foi publicado por Bertrand no *Journal des Savants*, em 1883.

o preço em função da quantidade. Na curva de demanda de mercado anterior, q é a quantidade total produzida e ofertada, e p é o preço. Mas como q irá se distribuir entre as duas empresas; e qual delas irá determinar o preço de mercado p?

Para responder a essa pergunta, temos de conhecer as funções de recompensa das duas empresas. Como as funções de recompensa das duas empresas serão idênticas, podemos escrever genericamente a função de recompensa da empresa i, que pode ser qualquer uma das duas empresas, considerando suas decisões e as da outra empresa. Chamaremos, genericamente, esta última empresa de empresa j.

Finalmente, sejam a função de custo de qualquer uma das duas empresas dada por $C(q_i) = cq_i$, com $c > 0$. As funções de recompensa dessa empresa i, π_i, são dadas por:

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)(100 - p_i) \text{ se } p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)(100 - p_i)}{2} \text{ se } p_i = p_j \\ 0 \text{ se } p_i > p_j \end{cases}$$

O que a primeira função de recompensa, após a chave, nos diz é que o lucro da empresa i será dado pelo produto da quantidade total demandada pelo mercado ao preço p_i, ou $(100 - p_i)$, multiplicada pela margem de lucro obtida pela empresa i em cada unidade produzida (o termo $(p_i - c)$ da expressão). Isso desde que *o preço estabelecido pela empresa i, p_i, seja menor do que o preço estabelecido pela outra empresa, p_j.*

A segunda função de recompensa nos informa que o lucro da empresa i é metade do lucro que ela obtém no caso anterior, considerando que os preços das duas empresas sejam iguais, uma vez dada nossa hipótese de que, se $p_i = p_j$, as empresas dividem igualmente o mercado. Note que, no caso anterior, a empresa i atendia a todo o mercado a seu preço, ou seja, ela vendia $(100 - p_i)$, e que, se os preços forem iguais, ela venderá metade dessa quantidade, $(100 - p_i)/2$. Finalmente, se o preço da empresa i for maior do que o da outra empresa, ela nada produz, ou vende, e seus lucros se reduzem a zero.

Vamos pensar agora em termos de equilíbrio de Nash. Se uma das empresas estabelece um preço p, tal que $p > c$, qual é a melhor resposta para a outra empresa? Sem dúvida é estabelecer um outro p', tal que p' seja ligeiramente inferior a p (apenas o suficiente para os consumidores perceberem a diferença e

abandonarem o produto da concorrente, ainda que seja apenas um centavo!), desde que $p' > c$.

Fazendo isso, a empresa que estabelecesse p' estaria capturando todo o mercado da outra empresa, e seus lucros seriam maiores (ela estaria capturando todo o mercado com uma redução de apenas um centavo no preço!). A outra empresa, por sua vez, teria seu lucro reduzido a zero.

Mas se p' é a melhor resposta a p, p não é a melhor resposta a p'. A melhor resposta a p' seria um p'', ligeiramente inferior a p' e superior a c, e assim por diante. Desse modo, só existe um par de preços que é a melhor resposta um ao outro e vice-versa: é o par (p_i^*, p_j^*), tal que $p_i^* = p_j^* = c$.

Qualquer preço acima desse valor c deixaria a empresa que o adotou vulnerável a um preço que fosse ligeiramente inferior ao seu, ainda que maior do que c, e que capturaria todo o mercado. Qualquer preço inferior a c também não seria adequado, pois o valor recebido pela última unidade produzida seria inferior a seu custo, e a empresa que tivesse adotado esse preço inferior a c teria prejuízo. Melhor do que ter prejuízo é ter lucro zero. A melhor resposta a um preço igual ao custo de produzir mais uma unidade; portanto, é outro preço igual ao custo de produzir mais uma unidade.

O resultado que acabamos de obter é consequência da aplicação da lógica do equilíbrio de Nash ao modelo de determinação simultânea de preços, dadas as hipóteses inicialmente assumidas: a única combinação de estratégias que é, recíproca e simultaneamente, a melhor resposta possível uma à outra é $p_i^* = p_j^* = c$, com ambas as empresas tendo lucro zero.

Esse resultado é conhecido como o *paradoxo de Bertrand*, pois temos um mercado caracterizado como um duopólio, produzindo o mesmo resultado de um mercado competitivo: preços idênticos, ao nível do custo de produzir mais uma unidade, e lucros nulos, algo que, em princípio, só deveria ocorrer em mercados nos quais as empresas fossem suficientemente pequenas para que suas decisões individuais não afetassem o preço de mercado.

É importante enfatizar que esse estranho resultado (um duopólio se comportando como um mercado em concorrência perfeita, isto é, com as empresas estabelecendo preços iguais a seus custos) é consequência das três hipóteses (muito restritivas) adotadas: a hipótese de que não há diferenciação de produto, a hipótese de que não há restrição de capacidade produtiva (daí os custos marginais serem constantes) e a hipótese de que as decisões são simultâneas em um único momento do tempo.

Assim, vamos voltar ao exemplo empregado na discussão do modelo de Cournot, de duas empresas de cimento, a Empresa 1 e a Empresa 2. Como as funções de custo das duas empresas são dadas, respectivamente, por:

$$C_1 = 4q_1$$

e

$$C_2 = 4q_2$$

Segue-se que, se as duas empresas não estiverem determinando simultaneamente as quantidades produzidas – como é o caso analisado no modelo de Cournot –, mas sim seus preços – como é o caso analisado no modelo de Bertrand –, o equilíbrio nesse último caso será dado por:

$$p_1 = p_2 = c = 4$$

Onde p_1 é o preço do cimento produzido e vendido pela Empresa 1, p_2 é o preço do cimento produzido e vendido pela Empresa 2, e 4 reais é o custo marginal[6] c da produção de cimento, idêntico para as duas empresas.

Também é um exercício interessante observar o que acontece se alterarmos algum dos pressupostos fundamentais do modelo. Faremos isso supondo que as empresas operam com limites às suas capacidades de produção – nenhuma delas pode atender a toda a demanda no caso de o preço se igualar ao custo marginal.

BOX 4.1

Cournot ou Bertrand?

O leitor deve estar surpreso com as diferenças nos resultados dos modelos de Cournot e Bertrand. Com efeito, no caso do modelo de Cournot com duas empresas, o resultado em termos de quantidade produzida é inferior à quantidade que seria obtida com um mercado perfeitamente competitivo. Já no caso do modelo de Bertrand com duas empresas sem restrição de capacidade, o resultado é idêntico ao que seria obtido se o mercado fosse perfeitamente competitivo. Dado que os dois modelos apresentam resultados tão diferentes, quando cada um deles deve ser usado?

Luis M. B. Cabral, em seu livro *Introduction to Industrial Organization,* oferece uma sugestão: é importante avaliar que tipo de indústria está sendo considerada. Existem indústrias em que é mais difícil para as empresas ajustar as quantidades produzidas do que os preços. Isso acontece em indústrias nas quais o investimento leva mais tempo para resultar em um aumento da capacidade produtiva. Esse seria o caso de indústrias como a siderúrgica, a automobilística, a de cimento etc.

---

6 Custo marginal é a variação do custo total em função da variação na quantidade produzida. Algebricamente, é expresso pela derivada do custo em função da quantidade, dC/dq. É fácil ver que, para qualquer uma das duas empresas, $dC_i/dq_i = 4$.

Nessas e em outras indústrias, o modelo de Cournot seria o mais adequado, pois, dado que é mais difícil ajustar a quantidade que pode ser produzida do que o preço, a decisão estratégica crucial para a empresa é relativa à quantidade que poderá produzir, ou seja, qual será o nível de capacidade adequado.

Já para outras indústrias, é mais fácil ajustar a quantidade produzida do que o preço do produto. Pense em uma indústria de software. Um aumento na demanda por seus programas significa apenas um aumento no número de downloads realizados, o que pode ser feito instantaneamente! Nesse caso, a variável estratégica para a empresa é o preço do produto que ela irá definir, e o modelo de Bertrand se torna mais adequado para estudá-la.

O Modelo de Bertrand com Restrição de Capacidade: O Paradoxo de Edgeworth

Vamos retornar ao exemplo anterior. Seja, mais uma vez, uma função de demanda total dada por:

$$q(p) = 100 - p$$

Contudo, vamos supor agora que cada empresa enfrenta uma limitação de capacidade produtiva, da seguinte forma: **cada empresa não pode produzir mais do que 60 unidades.** Isso significa uma alteração importante no comportamento desse mercado: caso uma empresa adote um preço muito baixo, poderá atrair mais consumidores do que pode atender.

Se isso acontece, isto é, se uma empresa estabelece um preço suficientemente baixo para que a demanda supere sua capacidade produtiva, precisamos de algum critério para definir quais consumidores serão atendidos pela empresa que está cobrando o preço mais baixo e quais consumidores serão atendidos pela firma que está cobrando o preço mais elevado.

Uma opção é supor que os consumidores que são atendidos pela firma que cobra mais barato são aqueles que mais valorizam o produto em questão. Esse pode ser o caso se os consumidores que mais valorizam o produto são aqueles que mais se esforçam para obter um menor preço. Nesse caso, diz-se que está sendo adotada a chamada *regra de racionamento eficiente* como critério de racionamento do produto entre os consumidores.

Vejamos como são construídas as funções de recompensa das duas empresas. Inicialmente, vamos supor que uma das empresas, a empresa i, estabeleça um preço $p_i < p_j$. Como estamos supondo que a empresa i estabeleceu um preço in-

ferior ao da empresa *j*, a princípio somente ela irá atender ao mercado. A pergunta agora é: quanto da demanda ela irá atender?

Já vimos que a função de demanda é dada por: $q(p) = 100 - p$. Nesse caso, como $p_i < p_j$, segue-se que $p = p_i$. Isso significa, por exemplo, que se a empresa *i* estabeleceu um preço inferior ao preço da empresa *j*, no valor de, por exemplo, 70 reais, a empresa *i* irá produzir e vender ao mercado $100 - 70 = 30$ unidades. Se, em vez de um preço de 70 reais, a empresa *i* tivesse estabelecido um preço de 60 reais, venderia 40 unidades. E assim por diante.

Há, contudo, um problema. Esses cálculos têm uma restrição: a empresa *i* (assim como a empresa *j*) não pode produzir e vender mais do que 60 unidades. Em outras palavras, a equação $100 - p_i$ a princípio, somente é válida se a quantidade a ser vendida ou produzida for inferior ou igual a 60 unidades (a capacidade máxima da empresa). Se a quantidade determinada pela equação $100 - p_i$ for superior a 60 unidades, a empresa que estiver com o preço mais baixo produzirá apenas 60 unidades.

A forma algébrica de descrever isso é por meio da função:

$$Min\ \{100 - p_i, 60\}$$

Essa função nos informa que a empresa *i* irá produzir o *menor* valor entre dois possíveis: o valor determinado por $100 - p_i$ e o valor 60.

E o que acontece com os custos totais dessas empresas? Podemos manter a mesma hipótese de custos do caso anterior, mas agora fazendo uma pequena alteração: $C(q_i) = cq_i$, com $c > 0$, se $q_i \leq 60$; e $C(q_i) = \infty$ se $q_i > 60$. O que estamos querendo dizer com essas fórmulas é que o custo é dado por cq_i se a produção for igual ou menor a 60 unidades, caso contrário, o custo total de produção é infinito, significando que a empresa enfrenta restrição de capacidade.

Podemos agora escrever a função de recompensa da empresa *i*, π_i, sempre lembrando que é idêntica à função de recompensa da empresa *j*:

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)Min\{100 - p_i, 60\} \text{ se } p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)(100 - p_i)}{2}, \text{se } p_i = p_j \\ 0, \text{se } p_i > p_j, p_j \geq 40 \\ (p_i - c)(100 - p_i - 60) \text{ se } p_i > p_j, p_i < 40 \end{cases}$$

Já vimos o sentido da primeira equação da função de recompensa. O sentido da segunda equação da função de recompensa na expressão anterior é o mesmo da expressão para duas empresas sem restrição de capacidade: se os preços forem iguais, elas dividem o mercado entre si.

A novidade está na terceira e na quarta funções de recompensa. A terceira equação da função de recompensa nos diz que, caso a outra empresa estabeleça um preço menor do que o preço da empresa *i*, e se esse preço for igual ou superior a 40 reais, não sobra mercado para a empresa *i* produzir e vender. Por quê? Pelo fato de que, se a outra empresa (empresa *j*) estabelece um preço inferior ao preço da empresa *i*, por exemplo, de exatamente 40 reais, a demanda total será de $100 - p_j$ (como é a empresa *j* que está com o preço mais baixo, ela é que determina o preço de mercado): nesse caso, $100 - 40 = 60$.

Mas a demanda de 60 é exatamente igual à capacidade máxima de produção da empresa *j*: ela atende a todo o mercado e nada sobra para a empresa *i*. Por isso, se o preço estabelecido pela empresa *j* for menor que o preço da empresa *i*, mas superior a 40 reais, a demanda será insuficiente para as duas empresas, a empresa que cobra mais caro pelo seu produto nada conseguirá vender e seu lucro será zero.

Vejamos agora a última equação da função de reação. Nesse último caso, a empresa *j* também estabeleceu um preço inferior ao preço estabelecido pela empresa *i*, mas dessa vez o valor foi estritamente *inferior* a 40 reais. Com isso, mesmo operando a toda capacidade, a empresa *j* não consegue satisfazer a toda a demanda. Para visualizar o problema, suponha que a empresa *j* tenha estabelecido um preço de 20 reais, e a empresa *i*, um preço qualquer, superior a este. O que ocorrerá? A quantidade demandada à empresa *j* será: $100 - 20 = 80$.

Mas a empresa *j* só consegue produzir um máximo de 60! Ela não consegue atender toda a demanda. A empresa *i* dispõe de uma **demanda residual** igual à demanda total, no montante de $100 - p$, menos os 60 produzidos pela empresa *j*: $100 - p_i - 60$, ou, mais simplesmente, $40 - p_i$. Preferimos manter a expressão completa $100 - p_i - 60$ na última equação da função de reação, para que o leitor perceba que estamos deduzindo da demanda total a oferta da Empresa *j*, para obtermos a demanda residual da empresa *i*.

Qual será o equilíbrio agora? Para podermos entender melhor o que irá acontecer, suponha que as duas empresas possuem funções custo idênticas, iguais a $C = 5q_i = 5q_j$. É fácil perceber que $p_i = p_j = c = 5$, isto é, o equilíbrio no caso de ausência de restrição de capacidade produtiva *não* é mais um equilíbrio de Nash. Se as empresas estabelecerem o preço de 5 reais, idêntico a seus custos marginais, a demanda total será de $100 - 5 = 95$. Dado que o produto é

homogêneo e as duas empresas repartem o mercado igualmente, cada uma produzirá e venderá 95/2 = 47,5. O lucro de cada uma será zero.

Mas o que aconteceu se uma das empresas aumenta seu preço para 6 reais? Nesse caso, a demanda total de 95 não poderá ser totalmente atendida pela outra empresa, que continuará cobrando o preço original de 5 reais: a empresa que aumentou seu preço terá uma demanda residual de 100 – 6 – 60 = 34. A empresa que cobra o preço mais caro, de 6 reais, terá seu lucro determinado pela última equação da função de reação: (6 – 5) × (100 – 6 – 60) = (1) × (34) = 34! O lucro da empresa que elevou seu preço é maior do que o da empresa que manteve o preço igual ao custo marginal de 5 reais: o par de preços (5, 5) não é mais a melhor resposta ao outro, e vice-versa.

Logo, $p_i = p_j = c$ não constitui um equilíbrio de Nash. Se $p_i = p_j = c$ não constitui um equilíbrio de Nash, será que alguma combinação $p_i = p_j > c$ pode ser um equilíbrio de Nash? Para responder a essa pergunta, considere agora que as duas empresas estão cobrando preços iguais, porém acima do valor do custo marginal de 5 reais. Para ilustrar, vamos supor que ambas as empresas estão cobrando 10 reais por cada unidade de seus produtos. A demanda total é de 100 – 10 = 90. Essa demanda é dividida igualmente entre as firmas, o que dá a cada empresa uma demanda de 45 unidades. Com isso, o lucro de cada empresa é de (10 – 5) × (45) = 225.

Suponha agora que uma das firmas decida reduzir seu preço ligeiramente para 9,50. Essa empresa passa a ter uma demanda total de 100 – 9,50 = 91,5. Obviamente, ela não poderá atender a toda essa demanda, e produzirá no limite de sua capacidade produtiva, ou seja, 60 unidades. Seu lucro será, portanto, (9,50 – 5) × (60) = 270. Logo, se os preços forem iguais e superiores ao custo marginal, isto é, se $p_i = p_j > c$, também não teremos um equilíbrio de Nash, pois será lucrativo para qualquer uma das duas firmas reduzir ligeiramente seu preço.

Resta a última alternativa, $p_i \neq p_j$, e tanto $p_i > c$ como $p_j > c$. Como os resultados são simétricos para as duas empresas, tanto faz quem escolhe o maior preço. Vamos supor, então, que $p_i > p_j$. Se p_j for *maior* do que 40, a empresa i terá lucros nulos: melhor será reduzir seu preço a um nível ligeiramente inferior a p_j, e aí voltamos ao caso anterior.

Já no caso de p_j ser *menor* do que 40, caso a Empresa i adote um preço ligeiramente inferior a p_j, seus lucros aumentarão, mas então será mais lucrativo para a Empresa j reduzir seu preço ligeiramente em relação ao preço da empresa i, conforme vimos anteriormente, e assim por diante: também no caso de $p_i \neq p_j$, e tanto $p_i > c$ como $p_j > c$, não temos equilíbrio de Nash.

O resultado é que *não existe equilíbrio de Nash em estratégias puras no modelo de Bertrand com restrição de capacidade*. Esse resultado foi pela primeira vez percebido pelo economista e estatístico irlandês Francis Y. Edgeworth (1845–1926) e, por isso, é conhecido também como *o paradoxo de Edgeworth*.

Prova-se, contudo, que existe equilíbrio de Nash em estratégias mistas (discutiremos estratégias mistas mais adiante), para o modelo de Bertrand com restrição de capacidade. Contudo, a demonstração desse resultado está além do nível de um texto introdutório.

Vimos que o resultado do modelo de Bertrand convencional, em que ambas as empresas estabelecem seus preços iguais aos custos marginais, é severamente afetado pela imposição de restrições de capacidade. Outro fator que também pode afetar o resultado do modelo de Bertrand, em que os duopolistas estabelecem em equilíbrio seus preços iguais a seus custos marginais, é o fato de os produtos das empresas serem diferenciados.

Assim como a imposição de restrição de capacidade sobre as empresas afeta o resultado do modelo de Bertrand, se os produtos forem diferenciados também há consequências importantes, que iremos estudar agora.

O Modelo de Bertrand com Diferenciação de Produtos

O modelo de Bertrand trata de um processo em que cada empresa determina o preço de seu produto supondo dado o preço do produto da outra empresa. Nesse modelo, algumas hipóteses muito restritivas foram adotadas. Vimos como uma simples alteração do modelo, supondo que as empresas não conseguem, a preços iguais ou superiores a seus custos unitários, atender a toda a demanda, provoca uma modificação significativa nos resultados obtidos. Vamos alterar agora um outro aspecto básico do modelo de Bertrand: a suposição de que os produtos fabricados pelas duas empresas são homogêneos.

Na verdade, a homogeneidade dos produtos é uma hipótese que tem pouca relação com o que se observa na prática da economia e dos negócios. Mesmo quando os produtos são padronizados por algum órgão de normalização técnica (como é o caso, no Brasil, da ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas), nem por isso as empresas deixam de procurar diferenciar seus produtos: prazo de entrega, condições de assistência técnica etc. são exemplos de outros instrumentos de que as empresas podem lançar mão para tornar seus produtos diferentes aos olhos dos consumidores, ainda que *fisicamente* eles sejam idênticos.

Ao considerarmos que as empresas fixam seu preço sem conhecer as decisões das outras, mas os produtos são diferenciados, uma mudança importante se segue na curva de demanda de cada empresa. Agora a demanda de cada empresa é uma função inversa do seu próprio preço, e uma função direta dos preços das demais empresas! Em outras palavras, a demanda pelo produto da empresa *diminui* quando ela aumenta o preço de seu próprio produto, mas essa mesma demanda *aumenta* quando suas concorrentes aumentam os preços dos produtos delas.

Suponha que estamos considerando duas empresas automobilísticas que fabricam automóveis que competem pelo mesmo tipo de consumidor; digamos que sejam automóveis populares com motor 1.0 e de baixo custo. Chamaremos uma das empresas de Empresa 1 e a outra, de Empresa 2. Vamos supor que as funções de demanda da Empresa 1 e da Empresa 2 são dadas, respectivamente, por:

$$q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$$

e

$$q_2 = 100 - 2p_2 + p_1$$

Nas duas equações anteriores q_1 representa a quantidade demandada de automóveis da Empresa 1, q_2 representa a quantidade demandada de automóveis da Empresa 2, p_1 é o preço que a Empresa 1 cobra pelo seu automóvel, e p_2 é o preço que a Empresa 2 cobra pelo seu carro.

Há dois pontos importantes a serem observados no que diz respeito às funções de demanda das duas empresas. O primeiro deles é o fato que já deve ter sido notado pelo leitor de que na demanda de cada empresa aparece o preço do carro de sua concorrente com sinal positivo. Assim, por exemplo, na função de demanda da Empresa 1 temos que $q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$, em que o preço da outra empresa, a Empresa 2, aparece com sinal positivo ($+p_2$), significando que quando sua concorrente decide aumentar o preço de seu produto, a demanda pelo automóvel popular da Empresa 1 aumenta.

Outro ponto importante é que, embora qualquer uma das empresas perca alguns de seus consumidores ao aumentar o preço de seu produto, ela *não perde todos os seus consumidores*, como acontecia antes no modelo de Bertrand. Isso porque agora os produtos das empresas não são mais percebidos pelos consumidores como homogêneos. Desse modo, ainda que uma delas aumente seu preço, alguns consumidores permanecerão fiéis ao seu produto.

Nos termos do exemplo que acabamos de propor, pode ser que, para qualquer uma das duas empresas, alguns consumidores tenham uma preferência

pelo design do seu modelo, de forma que ainda resistam a comprar o modelo da outra empresa, mesmo que por um preço menor.

Vamos supor agora que as duas empresas possuam a mesma função de custos, de tal forma que os custos da Empresa 1 e da Empresa 2 sejam dados, respectivamente, por:

$$C_1 = q_1$$
$$C_2 = q_2$$

Para chegarmos às funções de recompensa de cada uma das empresas, teremos que considerar inicialmente suas receitas. Como estamos tratando de um modelo de competição em que as empresas determinam seus preços simultaneamente, as receitas totais da Empresa 1 e da Empresa 2 são dadas respectivamente, por:

$$RT_1 = p_1q_1 = p_1(100 - 2p_1 + p_2)$$

e

$$RT_2 = p_2q_2 = p_2(100 - 2p_2 + p_1)$$

Entendidas assim as receitas das duas empresas, vejamos como devemos tratar seus custos. As funções originais de custos das duas empresas, $C_1 = q_1$ e $C_2 = q_2$, expressam os custos como função da quantidade que cada empresa produz. Todavia, como as receitas estão expressas em função dos preços, precisamos apresentar também os custos como função dos preços, de forma que tanto a receita como os custos estejam expressos nas mesmas variáveis.

Para isso basta considerarmos que a quantidade produzida pela Empresa 1, q_1, é determinada por $q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$, e que a quantidade produzida pela Empresa 2, q_2, é determinada por $q_2 = 100 - 2p_2 + p_1$, e substituirmos essas duas expressões nas funções de custo da Empresa 1 e da Empresa 2, respectivamente, conforme fizemos a seguir:

$$C_1 = q_1 = (100 - 2p_1 + p_2)$$

e

$$C_2 = q_2 = (100 - 2p_2 + p_1)$$

As funções de recompensa da Empresa 1 e da Empresa 2, respectivamente π_1 e π_2, também são dadas por:

$$\pi_1 = RT_1 - C_1 = p_1 (100 - 2p_1 + p_2) - (100 - 2p_1 + p_2)$$

e

$$\pi_2 = RT_2 - C_2 = p_2 (100 - 2p_2 + p_1) - (100 - 2p_2 + p_1)$$

Para chegarmos às funções de reação precisamos considerar quais são as decisões maximizadoras de lucros de cada empresa, *dado o preço praticado pela empresa concorrente*. Como já tivemos oportunidade de observar, para isso, tomamos a derivada de cada uma das funções de recompensa em relação ao preço da própria empresa ($\partial\pi_1/\partial p_1$, no caso da Empresa 1, e $\partial\pi_2/\partial p_2$, no caso da Empresa 2) e igualamos a zero, de forma que, a partir das equações anteriores obtemos:

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial p_1} = 102 - 4p_1 + p_2 = 0$$

e

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial p_2} = 102 - 4p_2 + p_1 = 0$$

Para encontrarmos os preços de equilíbrio nesse modelo de determinação simultânea de preços em que os produtos são diferenciados, devemos resolver as duas equações anteriores como um sistema de equações simultâneas. Ao resolvermos simultaneamente as duas equações, encontraremos o *equilíbrio de Nash* em que cada uma das duas empresas escolhe o preço que maximiza seu lucro, dado o preço escolhido pela outra empresa, e isso será verdade simultaneamente para as duas empresas.

Desse modo, temos que, da equação anterior, p_2 é dado por:

$$p_2 = \frac{102 + p_1}{4}$$

Substituindo a expressão obtida para p_2 na equação $102 - 4p_1 + p_2 = 0$, resulta que:

$$102 - 4p_1 + \frac{102 + p_1}{4} = 0$$

O que, após algumas simplificações, se resume a:

$$p_1 = \frac{510}{15} = 34$$

E assim:

$$p_2 = \frac{102+34}{4} = 34$$

O leitor pode se certificar de que nesse caso a demanda de cada empresa será de 66 unidades. Assim, cada empresa terá um lucro igual a: (preço × quantidade) – custo = (34 × 66) – 66 = 2.178. Os lucros, no caso de produtos diferenciados, são diferentes de zero, ao contrário do que acontece com o modelo de Bertrand com produtos homogêneos. As empresas estão estabelecendo seus preços bem acima de seus custos marginais (no caso, iguais a 1).[7]

Vejamos a representação das funções de reação das duas empresas no Gráfico 4.2. Inicialmente, é importante notar que, no caso do modelo que ora estudamos, as funções de reação das duas empresas têm inclinação positiva. Isso significa que quando a Empresa 1 aumenta o preço de seu carro popular, a Empresa 2 pode aumentar o preço do seu automóvel popular sem recear que a perda de consumidores seja tão grande que reduza seus lucros. Por que isso ocorre?

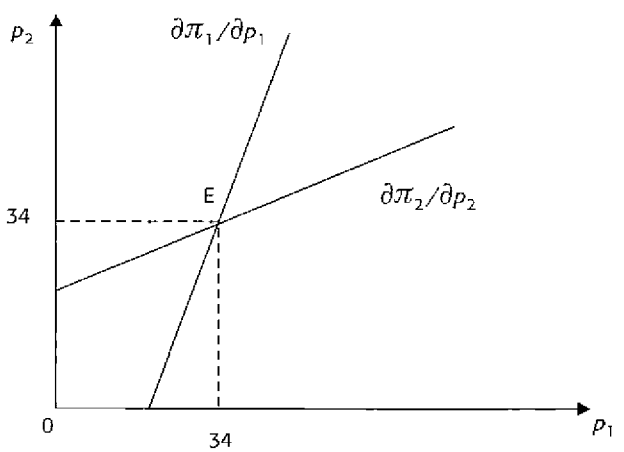


Gráfico 4.2 Funções de Reação do Modelo de Determinação Simultânea de Preços com Produtos Diferenciados

Isso ocorre porque apenas parte de seus consumidores estaria disposta a trocar de fabricante (já que os produtos são diferenciados) e, mesmo entre estes, alguns seriam desestimulados pelo fato de o carro da Empresa 1 custar mais caro. O mesmo aconteceria na situação inversa, em que a Empresa 2 aumentasse o preço de seu carro popular. Nessa hipótese, a Empresa 1 po-

7 O leitor não deve esquecer que o custo marginal (*CMg*) de qualquer empresa *i* é dado por: $CMg = \frac{dCT}{dq_i}$. *Como para qualquer uma das duas empresas* $CT_i = q_i$, segue-se que $CMg = 1$.

deria também aumentar o preço de seu carro, sem que isso significasse reduzir os lucros.

É interessante notar que, enquanto as funções de reação do modelo de Cournot são negativamente inclinadas (reveja o Gráfico 4.1), as funções de reação do modelo de determinação simultânea de preços com produtos diferenciados são positivamente inclinadas. Quando as funções de reação são negativamente inclinadas, como é o caso das funções de reação do modelo de Cournot, as **estratégias** dos jogadores (no caso do modelo de Cournot, as quantidades escolhidas pelas empresas) são ditas **substitutas estratégicas**.

Já quando as funções de reação são positivamente inclinadas, como no caso das funções de reação do modelo de determinação simultânea de preços com produtos diferenciados (veja o Gráfico 4.2), as estratégias dos jogadores são ditas **complementares estratégicas**.[8]

Vimos até aqui modelos que aplicavam o conceito de equilíbrio de Nash ao processo de competição, por quantidades ou preços, entre empresas. Vamos discutir agora um outro modelo, muito interessante para entendermos alguns aspectos não apenas da competição entre empresas, mas até mesmo da competição entre candidatos em uma eleição: o chamado "jogo da localização".

O JOGO DA LOCALIZAÇÃO

Uma outra aplicação de jogos simultâneos com estratégias contínuas é o chamado *jogo da localização*. Abordaremos esse jogo em suas duas versões mais simples: sem custos de transporte e com custos de transporte. A versão sem custos de transporte será útil para apresentarmos, um pouco mais adiante, o teorema do eleitor mediano. Já a versão com custos de transporte será útil para estudarmos a escolha estratégica das empresas pela diferenciação de seus produtos.

O Jogo da Localização sem Custos de Transporte

Imagine duas barracas de sorvete (vamos chamá-las de A e B), que têm de escolher sua localização em uma praia com 1 quilômetro de extensão. Podemos representar uma possível localização das duas barracas na praia de uma forma esquemática, pelo quilômetro da praia em que as barracas se localizam, na linha reta da Figura 4.1 (a):

8 Os termos complementares e substitutos estratégicos foram criados por Jeremy I. Bulow, John D. Geanakoplos e Paul D. Klemperer em seu artigo "Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements" (*Journal of Political Economy*, v. 93, n. 3, 1985, p. 488-511)

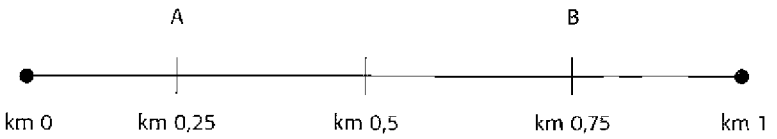


Figura 4.1 (a) O Jogo da Localização sem Custos de Transporte

Na Figura 4.1 (a) podemos observar que a barraca A se encontra no quilômetro 0,25 e a barraca B, no quilômetro 0,75. Cada barraca está, portanto, localizada a 250 metros de cada extremo da praia. Vamos supor que as duas barracas vendem exatamente o mesmo sorvete, e cobram também o mesmo preço pelo produto. Assim, não há qualquer razão para preferir comprar sorvete em uma ou outra barraca, exceto a distância.

É razoável supor que os banhistas prefiram comprar seu sorvete na barraca mais próxima (não esqueça que estamos supondo que as barracas vendem o mesmo sorvete ao mesmo preço). Contudo, uma hipótese importante é a de que, não obstante os banhistas se dirijam sempre à barraca mais próxima, não há nenhuma restrição na distância que estão dispostos a caminhar para chegar até ela.

Vamos supor que as duas barracas possuem os mesmos custos, e que esses custos não são afetados pela localização que elas decidem ocupar na praia. Também iremos supor, para simplificar, que os custos unitários de venda de sorvete das barracas são constantes: um aumento na quantidade vendida de sorvete não aumenta o custo da barraca por unidade de sorvete vendida.

Finalmente, no que diz respeito às barracas, conforme vimos, vamos ainda supor que elas vendem o mesmo sorvete, e como seus custos são iguais, vendem o mesmo sorvete ao mesmo preço. Como as barracas vendem o mesmo sorvete ao mesmo preço, elas competem somente pelo número de banhistas a que conseguem atender.

Suponhamos, para facilitar nossa análise, que os banhistas se distribuem uniformemente na praia. Ou seja, não se concentram em nenhum trecho ou ponto específico. Suponhamos também que cada banhista compra apenas um sorvete. Desse modo, quanto maior a extensão da praia servida por uma barraca, maiores as suas vendas e, tudo o mais constante, maiores os lucros das barracas.

Dadas essas premissas, a pergunta que fazemos, observando a Figura 4.1 (a), é: a disposição das barracas na Figura 4.1 (a) é de equilíbrio? Mais especificamente, é um equilíbrio de Nash? Pode-se ver facilmente que não. Se qualquer uma das barracas – por exemplo, a barraca B –, se deslocasse até ficar ao lado da outra barraca, ela atenderia aos consumidores da metade da praia que vai do

quilômetro 0,5 até o quilômetro 1, *mais* aos consumidores que se encontram *a partir* de 250 metros do extremo da praia situado no quilômetro 0, como se encontra assinalado na Figura 4.1 (b):

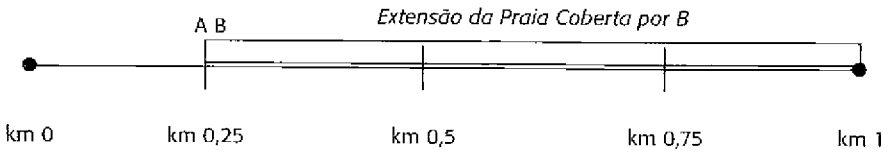


Figura 4.1 (b) O Jogo da Localização sem Custos de Transporte

Assim, considerando a hipótese de que os banhistas se distribuem uniformemente pela praia, com sua nova posição a barraca B está atendendo a um número muito maior de banhistas do que a barraca A.

De fato, supondo que há N banhistas distribuídos uniformemente na praia e dado que a barraca B está cobrindo uma extensão que vai do quilômetro 1 até o quilômetro 0,25, sua demanda total (supondo que cada banhista compre um sorvete) será de:

$$\text{Demanda da Barraca B} = N(1 - 0{,}25) = N \times 0{,}75 \text{ sorvete}$$

Enquanto isso, a barraca A estaria vendendo apenas:

$$\text{Demanda da Barraca A} = N(0{,}25 - 0) = N \times 0{,}25 \text{ sorvete}$$

Como ambos os proprietários das barracas são racionais e antecipam as estratégias de seu rival, o dono da barraca A sabe que a situação representada na Figura 4.1 (b) é uma possibilidade, e que sua posição no quilômetro 0,25 não é a melhor resposta caso o dono da barraca B se coloque ao seu lado, digamos no quilômetro 0,26. Analogamente, B sabe que, caso se situe no quilômetro 0,75, estará sujeito a que A se instale no quilômetro 0,74 e cubra praticamente ¾ da praia (o leitor deve verificar isso).

Portanto, nenhuma das duas posições originais das barracas é um equilíbrio de Nash, uma vez que o concorrente pode aumentar seus ganhos caso qualquer uma das duas barracas se situe a 250 metros de cada extremo da praia. Na verdade, há somente uma localização, para ambas as barracas, em que nenhuma delas consegue aumentar seus ganhos mudando de posição: ambas as barracas devem se situar no meio da praia, como ilustra a Figura 4.2:

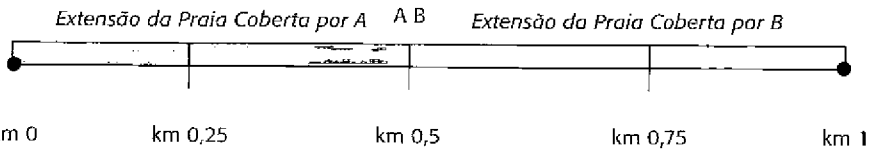


Figura 4.2 O Jogo da Localização sem Custos de Transporte: O Equilíbrio de Nash

Na Figura 4.2, as duas barracas dividem igualmente a praia, cada uma atendendo a uma das metades. Note-se que esse equilíbrio é um equilíbrio de Nash: cada barraca adotou a melhor resposta à localização da outra, e nenhum dos dois proprietários de barraca tem qualquer incentivo para mudar de estratégia: nenhuma barraca ganharia nada alterando sua posição.

Nesse caso, dada a hipótese de que os banhistas se encontram distribuídos uniformemente na praia e que cada um compra um sorvete, se representarmos o número total de banhistas por N, cada uma das barracas estará vendendo $N \times 0{,}5$ sorvetes.

Suponha que uma das barracas, digamos B, decida mudar sua posição, instalando-se um pouco mais próxima do início da praia, no quilômetro 0,25. Com isso, a barraca B atenderia a todos os banhistas nos primeiros 250 metros de praia e mais aos banhistas situados na metade da distância entre a barraca B e a barraca A. A barraca A atenderia aos banhistas situados no restante da praia. Como supomos que são N banhistas distribuídos uniformemente ao longo da praia, a barraca A passaria a atender aos banhistas entre o quilômetro 1 e o quilômetro 0,375, ou seja, sua demanda total de sorvetes (sempre supondo que cada banhista compra um sorvete):

$$\text{Demanda da Barraca A} = N(1 - 0{,}375) = N \times 0{,}625 \text{ sorvete}$$

Ou seja, a mudança de posição da barraca B teria, na verdade, aumentado as vendas da barraca A! E o que teria acontecido com as vendas da barraca B? A barraca B atenderia aos banhistas do começo da praia (quilômetro 0) até o quilômetro 0,375:

$$\text{Demanda da Barraca B} = N(0{,}375 - 0) = N \times 0{,}375 \text{ sorvete}$$

Assim, as vendas da própria barraca B se reduziriam de $0{,}5N$ sorvete para $0{,}375N$ sorvete. Não haveria, para B, nenhum ganho resultante da mudança. O leitor deve investigar que não há nenhuma possibilidade de ganho para nenhuma das duas barracas ao mudarem suas posições daquelas que indicamos serem as posições correspondentes ao equilíbrio de Nash na Figura 4.2.

Talvez a apresentação do jogo de localização como um problema de barracas de sorvete na praia pareça um tanto prosaica para o leitor. O jogo da localiza-

ção sem custos de transporte, todavia, possui uma aplicação política muito interessante, conhecida como o teorema do eleitor mediano. Esse será o nosso próximo assunto.

Uma Aplicação do Jogo de Localização sem Custos de Transporte: O Jogo da Competição Eleitoral e o Teorema do Eleitor Mediano

Vamos tratar agora de uma outra aplicação interessante do modelo de localização, dessa vez a um tema bastante diferente da localização de barracas de sorvete em uma praia: se você fosse um político concorrendo a um cargo público e desejasse aumentar suas chances de vencer a eleição, que tipo de plataforma política deveria escolher, caso os eleitores votassem em função de uma única questão? Normalmente, não é isso o que ocorre na prática, pois as eleições envolvem um conjunto de questões. Mas esse é um modelo mais simples, que irá ilustrar um teorema importante da ciência política. Vamos chamar esse jogo de "Jogo da Competição Eleitoral".

Desse modo, os eleitores escolherão o candidato que mais se aproximar da posição que eles próprios têm em relação à questão em debate nas eleições. A posição preferida por um eleitor no que diz respeito à questão em debate nas eleições é chamada **ponto ideal**. Apenas para simplificar, vamos supor que os eleitores se distribuam uniformemente em relação à questão em torno da qual se dará a eleição, ao longo de um espectro ideológico que vai da extrema esquerda à extrema direita.

Para analisar essa escolha é preciso representar o espectro ideológico graficamente. Podemos fazer isso simplesmente atribuindo um "índice" à posição ideológica preferida do eleitor quanto à questão em debate, ou seja, seu ponto ideal, e representando esse índice por uma reta, na forma da Figura 4.3:

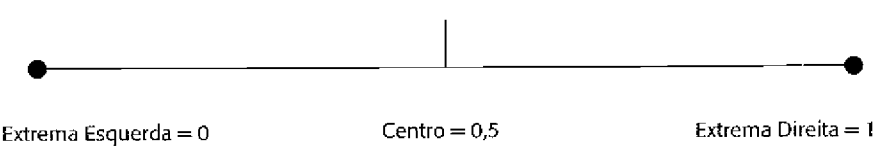


Figura 4.3 Representação do espectro idelógico

Obviamente, os números atribuídos às posições de extrema esquerda, centro e extrema direita (0, 0,5 e 1, respectivamente) representam apenas índices simbólicos do distanciamento das posições ideológicas entre si no que diz respeito à questão que mobiliza o debate eleitoral.

Assim, por exemplo, afirmar que, de acordo com nosso índice, um dado eleitor tem uma posição no espectro ideológico de 0,5 significa apenas que esse eleitor está exatamente em uma posição intermediária entre a extrema esquerda e a extrema direita.

Vamos supor que os eleitores se distribuam uniformemente entre as várias posições ideológicas. Nesse caso, os pontos ideais *e os votos* dos eleitores não se concentrariam em nenhuma região do espectro da Figura 4.2.

Assim, tendo adotado a hipótese de distribuição uniforme dos eleitores no espectro político, juntamente com a suposição de que a cada eleitor corresponde apenas um voto, o comportamento dos eleitores nessa eleição hipotética se encontra representada no Gráfico 4.3:

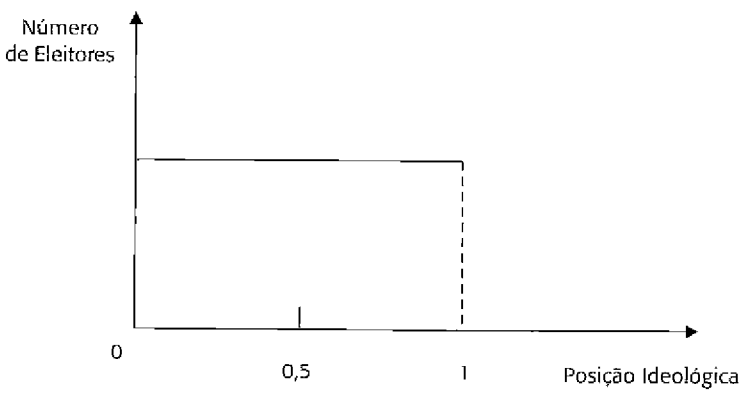


Gráfico 4.3

Temos agora que definir um outro conceito: o conceito de **eleitor mediano**. O eleitor mediano é aquele que divide a distribuição dos eleitores em torno de uma questão em duas metades iguais.

No caso do nosso exemplo, o eleitor mediano é aquele cujo ponto ideal é representado pelo valor de 0,5, isto é, é o eleitor situado exatamente no centro do espectro ideológico.

Feita essa representação, estamos em condições de analisar que tipo de plataforma política um candidato deve escolher para maximizar suas chances de ser eleito. Vamos supor que há apenas dois candidatos: o candidato que chamaremos de "Verde" e o candidato que chamaremos de "Amarelo".

Podemos também estabelecer que, simbolicamente, o candidato que obtiver mais votos recebe uma recompensa de 1 (que corresponde à vitória), e o candidato que obtiver o menor número de votos obtém uma recompensa de – 1 (que corresponde à derrota). Se ambos os candidatos dividirem o eleitorado entre si,

cada um dos candidatos obtém uma recompensa de 0, pois a eleição termina empatada.

Vamos supor também que, entre os dois candidatos, os eleitores votam naquele que mais se aproxima das suas próprias posições como eleitores. Assim, um eleitor com uma posição, suponhamos, de 0,5 preferirá um candidato com uma posição de 0,3 a um candidato com uma posição de, digamos, 0,8. Nessas circunstâncias, como Verde e Amarelo devem escolher suas plataformas de modo a maximizarem suas chances eleitorais?

A quantidade de votos que cada candidato obtém pode ser encontrada no Gráfico 4.3, considerando que a área sob a reta expressa a distribuição dos eleitores que corresponde às posições dos eleitores que o candidato consegue conquistar. Assim, por exemplo, um candidato que conquistasse exatamente os eleitores que têm posições entre 0 e 0,25 conseguiria: (número de eleitores) × (0,25 – 0) = 25% do total de votos. Já um candidato que conseguisse os votos dos eleitores com posições entre 0,3 e 0,7 conseguiria: (número de eleitores) × (0,7 – 0,3) = (número de eleitores) × (0,4) = 40% do total de votos.

Considere agora como cada candidato analisa suas chances de ser eleito, de acordo com a plataforma política que tenha escolhido. Suponha que o candidato Verde tenha se colocado no espectro ideológico na posição v assinalada no Gráfico 4.4:

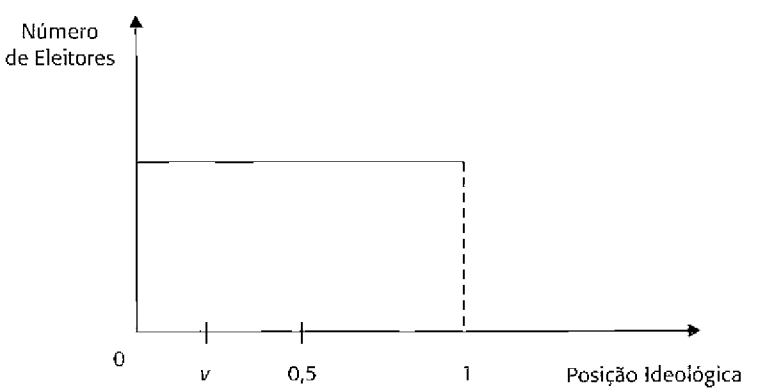


Gráfico 4.4

Uma vez que o candidato Verde tenha situado sua plataforma política em v, a questão passa a ser o que seria a melhor plataforma eleitoral para o candidato Amarelo, que maximizasse suas chances de ganhar a eleição. O candidato Amarelo sabe que os eleitores preferem um candidato mais próximo de sua posição ideológica do que um candidato mais distante. Assim, uma vez que Verde se si-

tuou em v, se Amarelo se situar ligeiramente à direita de v, irá conquistar os votos dos eleitores que se encontram entre v e 1 no espectro ideológico.

Por exemplo, suponha que $v = 0{,}3$ e que Amarelo se situe ligeiramente à direita no espectro ideológico. Nesse caso, Verde obteria aproximadamente $(0{,}3 - 0) \times$ número de eleitores = 30% dos votos. Já Amarelo obteria aproximadamente $(1 - 0{,}3) \times$ número de eleitores = 70% dos votos. Por estar cobrindo um espectro político maior, Amarelo ganharia com mais do dobro de votos.

Como o segmento entre v e 1 é maior do que o segmento entre 0 e v, Amarelo cobrirá uma parcela maior do espectro ideológico do que Verde, e ganhará a eleição. A lógica desse resultado é que, ainda que os eleitores mais próximos de 1 considerem a posição de Amarelo muito distante de suas opções ideológicas, a posição de Amarelo ainda se encontra mais próxima de suas posições do que a posição adotada por Verde, que está ligeiramente mais à esquerda. Assim, os eleitores em uma posição entre v e 1 acabariam por votar em Amarelo, fazendo uma espécie de "voto útil".

Vimos então que caso Verde se situasse à esquerda do eleitor mediano, isto é, do eleitor que, nesse caso específico, estivesse exatamente na posição política de centro (que se encontra no ponto ideal 0,5), seria interessante para Amarelo se situar ligeiramente mais à direita, conquistando os votos dos eleitores de esquerda com posições mais ao centro e também dos eleitores de direita.

Vamos mudar nosso raciocínio. Suponhamos que, desta vez, foi Amarelo que se situou em alguma posição entre o centro e a posição 1 (extrema direita). Qual será agora a plataforma eleitoral mais interessante para Verde?

O Gráfico 4.5 retrata uma situação hipotética em que Amarelo decidiu se situar em a, ou seja, em alguma posição entre o centro ideológico e a extrema direita. Nesse caso, o leitor já deve estar antecipando que Verde conseguirá ganhar a eleição se situar ligeiramente à esquerda de a, pois irá conquistar os vo-

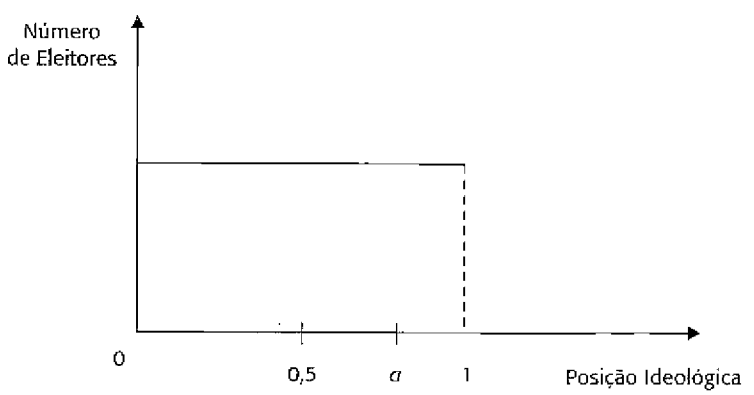


Gráfico 4.5

tos dos eleitores que se situam da extrema esquerda (na posição 0) até os que se encontram entre a posição a e a posição de centro (0,5).

Por exemplo, suponha que $a = 0{,}6$ e que Verde se situe ligeiramente à esquerda no espectro político. Nesse caso, Amarelo obteria aproximadamente $(1 - 0{,}6) \times$ número de eleitores = 40% dos votos. Já Verde obteria aproximadamente $(0{,}6 - 0) \times$ número de eleitores = 60% dos votos. Por estar cobrindo um espectro político maior, Verde ganharia a eleição.

Podemos generalizar esse resultado. Caso um dos candidatos se situe à direita do eleitor mediano, o outro candidato conseguirá um número maior de votos situando-se ligeiramente à esquerda do primeiro candidato e, caso um dos candidatos se situe à esquerda do eleitor mediano, o outro candidato conseguirá um número maior de votos situando-se ligeiramente à direita do primeiro candidato.

Dito de uma outra forma, um pouco mais precisa, *o candidato que se situar mais próximo do ponto ideal do eleitor mediano terá a maior chance de ganhar a eleição*. Algebricamente, se chamarmos o índice que representa a posição de qualquer um dos candidatos de x_i, o índice que representa a posição do outro candidato de x_j, e o ponto ideal do eleitor mediano de M, teremos que a função de recompensa de um dos dois candidatos i qualquer, (U_i), é dada pela seguinte expressão:

$$U_i = \begin{cases} 1 \text{ se } |x_i - M| < |x_j - M| \\ 0 \text{ se } |x_i - M| = |x_j - M| \\ -1 \text{ se } |x_i - M| > |x_j - M| \end{cases}$$

Qual será o equilíbrio de Nash nesse caso? Obviamente, o equilíbrio de Nash será representado por aquela plataforma que, uma vez adotada por um dos candidatos, constitui a melhor resposta possível a qualquer plataforma que o outro candidato adote, e isso seja verdade para todos os candidatos. Assim, precisamos, inicialmente, definir que estratégia é a melhor resposta para qualquer um dos dois candidatos, dependendo da estratégia que o outro tiver adotado.

A melhor resposta para qualquer um dos dois candidatos i, dependendo do que o outro candidato j escolher é:

(1) Se $x_j < M$, escolha x_i tal que $x_j < x_i < 2M - x_j$
(2) Se $x_j > M$, escolha x_i tal que $2M - x_j < x_i < x_j$
(3) Se $x_j = M$, escolha $x_i = M$

Vamos entender as condições anteriores. Considere inicialmente a condição (1). Vejamos um caso em que, de acordo com essa condição, $x_j < M$. Façamos então $x_j = 0{,}3$. A condição (1), nesse caso, implica que:

$$0{,}3 < x_i < 0{,}7$$

É fácil concluir então que qualquer valor entre 0,3 e 0,7 garante ao jogador *i* a vitória na eleição. Para entender a razão disso, considere o Gráfico 4.6 (a):

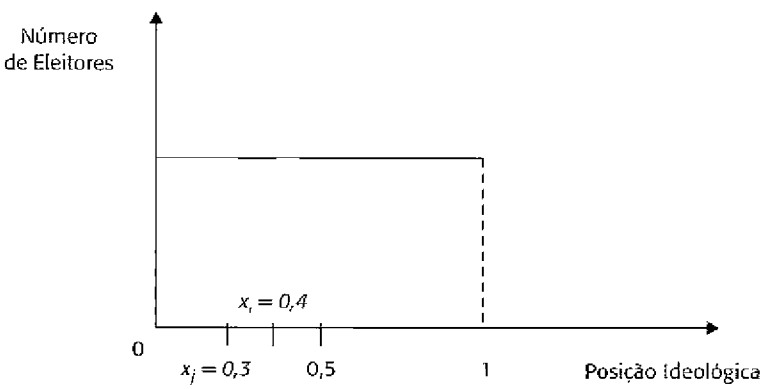


Gráfico 4.6 (a)

No Gráfico 4.6 (a), um dos candidatos, o candidato *i*, adotou uma plataforma em relação à questão que mobiliza o debate eleitoral ligeiramente mais ao centro (índice 0,4) do que o candidato *j*, que adotou uma plataforma mais próxima da extrema esquerda (índice 0,3).

Com isso, o candidato *i* está em condições de vencer a eleição: ele obtém os votos dos eleitores de esquerda que se encontram mais próximos dele do que do candidato *j*, ou seja, os eleitores entre 0,35 e 0,5, e mais todos os eleitores com posições do centro até a extrema direita (de 0,5 até 1). O candidato *i*, portanto, venceria as eleições com (1 – 0,35) × número de eleitores = 65% dos votos.

Assim fica claro o papel do limite inferior da nossa condição (1): se o candidato *i* tivesse escolhido uma plataforma ainda mais radical do que a do candidato *j* (com um índice inferior a 0,3), o candidato *j* teria vencido com, no mínimo, 70% dos votos.

Contudo, vamos voltar à aplicação da condição (1) no nosso exemplo: $0{,}3 < x_i < 0{,}7$. No caso do Gráfico 4.6 (a), o candidato *i* tinha respeitado essa condição para uma plataforma com um índice inferior 0,5. Ou seja, o candidato *i* respeitou o limite inferior da primeira condição e assim garantiu a vitória.

O mesmo resultado, contudo, poderia ter sido alcançado pelo candidato *i* se ele tivesse optado por uma plataforma mais à direita, desde que não fosse muito extremada (acima de 0,7). Para entender a razão disso, considere o Gráfico 4.6 (b):

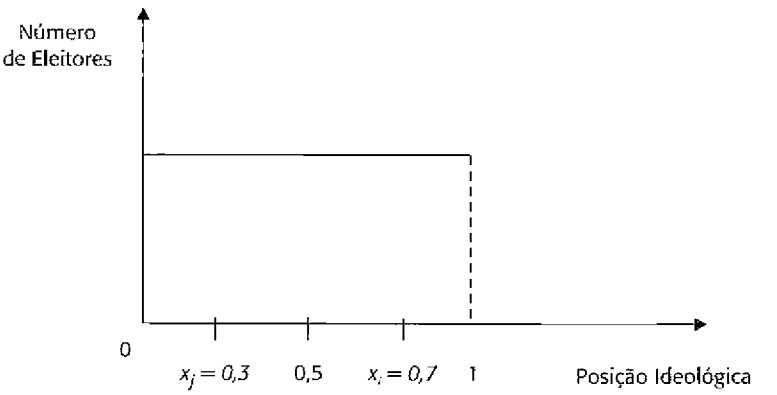


Gráfico 4.6 (b)

Será que um posicionamento tão à direita garantiria a vitória do candidato *i*? A resposta é sim, desde que o posicionamento de *i* não fosse tão à direita que igualasse ou superasse o índice de 0,7.

Com efeito, se o candidato *i* situou seu posicionamento na questão em debate na eleição exatamente em 0,7 ele conseguirá atrair os votos dos eleitores que se encontrem mais próximos do seu posicionamento do que do posicionamento do candidato *j*. Esses eleitores se encontram na metade à direita do segmento que vai de 0,3 até 0,7. Assim, o candidato *i* conseguiria atrair todo o eleitorado entre 0,5 (centro) e 1 (extrema direita), obtendo metade dos votos, o mesmo que o cadidato *j*. Bastaria ao candidato *i* escolher uma posição ligeiramente mais à esquerda, digamos 0,69, para garantir a vitória.

Atividade 4.1: Aplique esse mesmo raciocínio para mostrar a validade da condição (1) à condição (2), na qual: se $x_j > M$, escolha x_i tal que $2M - x_j < x_i < x_j$.

É fácil ver que a única combinação de plataformas que representam as melhores respostas umas às outras é a combinação em que ambos os candidatos se situam o mais próximos do centro possível (o item (3)). Somente quando os dois candidatos adotarem a recomendação (3) simultaneamente, nenhum dos dois candidatos terá como derrotar o outro adotando um posicionamento diferente.

Na prática, isso significaria que o candidato com um perfil mais conservador – por exemplo, Amarelo – estaria situado ligeiramente à direita da posição do eleitor mediano, e o candidato com o perfil mais reformista – por exemplo, o candidato Verde –, estaria situado ligeiramente à esquerda desse mesmo eleitor mediano e a eleição terminaria possivelmente empatada. Desse modo, o equilíbrio de Nash é constituído pelos *dois candidatos escolhendo plataformas muito semelhantes, que na prática se distinguem apenas marginalmente*.

Esse resultado é conhecido como o **teorema do eleitor mediano**, e depende sensivelmente das hipóteses adotadas. Por exemplo, se houver mais de uma questão em debate na eleição, esse resultado somente é obtido sob condições muito restritivas.[9]

Apesar disso, esse modelo simples nos ajuda a entender por que, em algumas eleições majoritárias, os candidatos apresentam plataformas tão parecidas: eles estão tentando aumentar ao máximo suas chances de conquistar os votos de eleitores com posições políticas diversificadas.

O leitor, contudo, pode estar se perguntando o que aconteceria se, no exemplo inicial das barracas de sorvete na praia, os banhistas não estivessem dispostos a caminhar grandes distâncias até conseguir comprar seu sorvete. Dito de uma forma um pouco menos prosaica, pode ser que haja *custos de transporte* significativos. Vejamos então como os custos de transporte podem afetar o modelo.

O Jogo da Localização com Custos de Transporte

Vamos voltar ao exemplo hipotético de duas barracas de sorvete em uma praia, às quais chamaremos novamente de A e B. Vamos supor que mais uma vez elas se encontram localizadas em suas posições iniciais, a 250 metros de cada extremidade da praia, conforme a Figura 4.4:

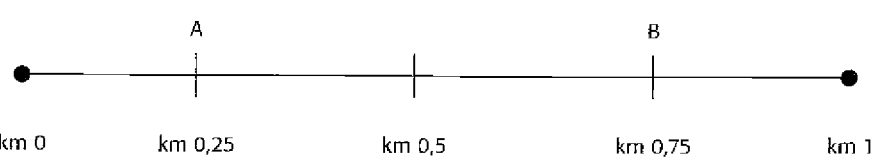


Figura 4.4 O Jogo da Localização com Custos de Transporte

9 Para uma apresentação didática dessas condições restritivas, bem como da suscetibilidade do teorema do eleitor mediano às hipóteses adotadas, veja James D. Morrow, *Game Theory for Political Scientists*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1994.

A nova suposição que faremos será de que há um custo de deslocamento ou de transporte para os banhistas que desejam adquirir seu sorvete. Essa hipótese altera de uma forma importante nosso modelo: agora cada banhista avalia se vale a pena caminhar até a barraca para adquirir o sorvete. Em outras palavras, ele considera não apenas o preço do sorvete (que continuamos supondo igual para as duas barracas), mas também o que poderíamos chamar de custo de deslocamento ou de transporte, que seria, nesse caso, a desutilidade para o banhista de ter de caminhar até uma barraca distante.

Desse modo, iremos considerar como o **preço cheio** (p^*) que o banhista paga pelo sorvete o preço p cobrado pelo dono da barraca *mais* a distância percorrida d multiplicada pelo custo de transporte t, ou seja:

$$p^* = p + td$$

Um ponto importante é que, na medida em que incluímos os custos de transporte no nosso modelo, os banhistas podem avaliar que não vale a pena caminhar uma distância mais longa para obter o sorvete. Pode haver assim um **preço de reserva**, ou seja, um valor máximo que os banhistas estejam dispostos a pagar pelo sorvete, *incluindo o custo de caminhar até a barraca*. Vamos chamar esse preço de reserva de V. Um banhista comprará o seu sorvete apenas se:

$$p^* \leq V$$

O que equivale a:

$$p + td \leq V$$

Ou, dito de outra forma:

$$d \leq \frac{V - p}{t}$$

Assim, apenas se a distância for inferior à diferença entre o preço de reserva do banhista e o preço cobrado pelo sorvete, dividido pelo custo de transporte, é que o banhista irá se deslocar até a barraca para adquirir o sorvete. Caso contrário, ele avaliará que não vale a pena caminhar tanto sob o sol para adquirir o sorvete. Assim como supusemos que cada banhista compra apenas um sorvete para simplificar, vamos também supor que o preço de reserva V é o mesmo para todos os banhistas.

Feitas essas considerações, voltemos à Figura 4.4: na situação ali descrita, cada uma das barracas deverá cobrir metade do mercado para maximizar seus lucros. Assim, o preço máximo que cada barraca cobrará deverá ser tal que o banhista mais distante ainda considere interessante adquirir seu sorvete. Em termos algébricos:

$$p = V - td_m$$

Onde d_m é a distância que a barraca se encontra do banhista mais distante. Como cada barraca se encontra a 250 metros de um dos extremos da praia, o banhista mais distante de cada barraca se encontra a 250 metros de cada uma delas, seja em direção ao meio da praia (quilômetro 0,5) ou em direção a um de seus extremos (quilômetro 0 para a barraca A e quilômetro 1 para a barraca B). Assim, na situação inicial representada na Figura 4.4, o preço que cada barraca cobrará pelo seu sorvete será:

$$p = V - 0{,}25t$$

Qual será o lucro de cada barraca nessa situação? Vamos supor que cada barraca tenha um custo unitário por sorvete vendido igual a c. Como cada barraca está atendendo a metade da praia, com N banhistas distribuídos uniformemente, o lucro de cada barraca (π_i) será dado por:

$$\pi_i = 0{,}5N(p - c) = 0{,}5N(V - 0{,}25t - c)$$

Da mesma forma que fizemos com o caso do jogo de localização sem custos de transporte, vejamos agora se essa situação inicial é um equilíbrio de Nash. Para isso, vamos investigar se alguma das barracas aumentaria seus lucros se modificasse sua posição. Considere então a Figura 4.5:

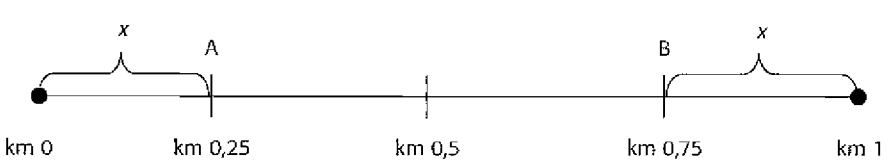


Figura 4.5 O Jogo da Localização com Custos de Transporte

Na Figura 4.5, indicamos uma mesma distância x que qualquer uma das duas barracas pode se aproximar de um dos extremos da praia. Na medida em que x for menor do que 0,25 quilômetros para uma das barracas, mais essa barraca se

aproxima de um dos extremos da praia. No caso em que $x = 0$ para alguma barraca, a barraca se localizaria exatamente a 250 metros do extremo da praia.

Se $x < 0{,}25$ quilômetros para uma das barracas, obviamente o banhista mais distante dela será aquele mais próximo do *centro* da praia. Para conseguir continuar a atender a esse banhista, a barraca terá de alterar seu preço, de forma que ainda seja compensador para esse banhista se deslocar até a barraca que se afastou em direção a um dos extremos da praia. Isso porque, como há um custo de transporte, sendo esse banhista o que está mais distante, será ele a fixar o maior preço que a barraca pode cobrar.

Vamos chamar a esse preço ajustado para a maior distância de $p(x)$. Como qualquer movimento de qualquer uma das barracas em direção a um dos extremos *aumenta* a distância do banhista que se encontra no centro da praia para além de 0,25 quilômetro de distância atual, segue-se que o preço que a barraca poderá cobrar será:

$$p(x) = V - 0{,}25t - tx = V - t(0{,}25 + x)$$

O lucro da barraca, para qualquer $x > 0$, é dado por:

$$\pi_i = 0{,}5N(p(x) - c) = 0{,}5N[V - t(0{,}25 + x) - c]$$

É fácil observar, na expressão anterior, que o lucro da barraca é máximo quando $x = 0$, isto é, quando a barraca não se desloca em nenhuma extensão rumo ao extremo da praia, mantendo-se em 0,25 quilômetro, no caso da barraca A, ou em 0,75 quilômetro no caso da barraca B. Logo, não há qualquer ganho para uma barraca em se mover em direção aos extremos. Mas e se ela se movesse em direção ao centro?

Para responder a essa pergunta, considere a Figura 4.6:

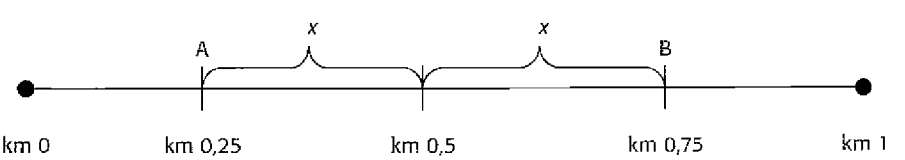


Figura 4.6 O Jogo da Localização com Custos de Transporte

Podemos observar na Figura 4.6 que o problema tem as mesmas características do anterior, com a particularidade de que, dessa vez, a distância x que é acrescida ao 0,25 quilômetro de distância da situação original diz respeito ao

aumento de distância de qualquer uma das barracas em relação aos banhistas que se encontram nas *extremidades* da praia.

Assim, um deslocamento de qualquer uma das duas barracas em direção ao centro da praia significa um aumento em x para os banhistas que se encontram em um dos extremos da praia, e tem de ser acompanhado por uma redução em $p(x)$, da mesma forma que no caso anterior.

Assim, de uma forma análoga ao caso anterior, teremos que, para os banhistas que se encontram no extremo da praia, $p(x) = V - 0{,}25t - tx = V - t(0{,}25 + x)$. O lucro das empresas, por sua vez, será mais uma vez dado pela expressão: $\pi_i = 0{,}5N(p(x) - c) = 0{,}5N[V - t(0{,}25 + x) - c]$. Desse modo, também nesse caso o deslocamento de uma das barracas para o centro da praia reduzirá os lucros.

Resulta então que a posição inicial da Figura 4.4 *representa um equilíbrio de Nash*. Nesse caso, ao contrário do jogo sem custos de transporte, agora cada barraca se situa em uma das metades da praia, a uma distância equidistante do centro e de cada extremo. Essa mudança de resultado foi provocada porque agora os consumidores, isto é, os banhistas consideram que há um custo associado ao transporte necessário para obter o sorvete.

O Jogo de Localização com Custos de Transporte: Representando a Escolha por Diferenciar Produtos

Quando os custos de transporte foram incorporados ao jogo de localização e, desse modo, procurar um produto (o sorvete) "mais distante" passou a apresentar um custo crescente na forma da desutilidade de uma maior caminhada na praia, na verdade estamos representando um fenômeno mais geral do que apenas o efeito da distância sobre a demanda de um produto: estamos tratando da *diferenciação* entre produtos.

Já abordamos a diferenciação de produtos brevemente, ao tratarmos das variantes do modelo de Bertrand. Vamos falar mais um pouco agora do que significa a diferenciação de produtos, com o auxílio do jogo de localização com custos de transporte. Diz-se que há **diferenciação de produtos** quando os consumidores percebem produtos de diferentes marcas, ainda que satisfaçam às mesmas finalidades, como diferentes. No jargão econômico esses produtos são ditos *substitutos imperfeitos*.

Basta o leitor considerar, ainda que brevemente, os produtos que são oferecidos para consumo, para perceber que a diferenciação de produtos é um fenômeno bastante comum. Por exemplo, os modelos de automóveis são diferentes quanto ao seu *design*, assim como ao conforto, espaço interno, cores, cilindra-

das etc. Não obstante essas diferenças, todos têm a mesma finalidade: meio de transporte.

Da mesma forma, refrigerantes diferem quanto ao seu sabor, embora, em princípio, sirvam ao mesmo fim: não obstante as diferenças de sabor, refrigerantes servem para matar a sede. É fácil ver que o mesmo se aplica aos artigos de limpeza, vestuário, eletrodomésticos etc.

De uma forma geral, podemos ter dois tipos de diferenciação de produtos: a **diferenciação horizontal**, quando a variação nos produtos é uma resposta às diferenças no gosto dos consumidores; e a **diferenciação vertical**, quando a variação nos produtos é uma resposta às diferenças no poder aquisitivo dos consumidores.

Como exemplo de diferenciação horizontal, temos, no caso da indústria automobilística, as diferenças no *design* dos automóveis: mais ou menos arrojados, mais ou menos esportivos etc. Como exemplos de diferenciação vertical, podemos citar, ainda na indústria automobilística, os modelos com acessórios e equipamentos mais caros e sofisticados, tais como freio ABS, *air-bag* etc. Assim, no primeiro caso, os consumidores se diferenciam pela diversidade de suas preferências; no segundo, pela diferença em suas possibilidades de gasto.

Quando analisamos a indústria moderna, em particular a indústria de bens de consumo, percebemos que a diferenciação de produtos é muito mais comum do que a homogeneidade dos produtos. A razão disso é a mesma que leva um banhista a se recusar a caminhar uma distância muito longa para comprar um sorvete, ainda que pague um pouco mais caro pelo sorvete comprado em uma barraca mais próxima: as pessoas têm preferências que levam a deslocamentos até o ponto de compra: por sabor, por *design*, por cores etc.

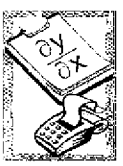
Assim, adquirir um produto mais afastado das suas preferências tem, para as pessoas, em função da diversidade de seu gosto (ou em função da diversidade da simples disposição para caminhar!), um custo, custo este tanto maior quanto mais o produto se distancia daquilo que as pessoas consideram o ideal.

Isso permite aos produtores que conseguem ser bem-sucedidos na diferenciação de seus produtos cobrar um pouco mais caro do que seu custo de produção, pois, ao fazerem isso, não perdem todos os consumidores, como supunha o modelo de Bertrand com sua hipótese de produtos homogêneos. Para alguns consumidores, o custo de se "deslocar" até outro produto, dadas as suas preferências, é tão elevado, que justifica pagar um pouco mais pelo produto mais adequado a suas preferências.

Esse fato é representado nos modelos atribuindo a cada produtor uma curva de demanda diferente, como fizemos ao tratar do modelo de determinação simultânea de preços com diferenciação de produto, que discutimos anterior-

mente. Por isso, é vantajoso para as empresas diferenciarem seus produtos: elas podem cobrar um pouco mais caro dos consumidores cujas preferências são mais bem atendidas, sem o receio de perder toda a sua demanda para seus competidores.

Agora, contudo, é o momento de considerarmos outra aplicação de teoria dos jogos, dessa vez à preservação ambiental e de recursos naturais. Vamos estudar a "tragédia dos comuns".



O PROBLEMA DOS RECURSOS COMUNS

Um problema muito popular na literatura sobre a utilização de recursos naturais é o chamado **problema dos recursos comuns** ou **tragédia dos comuns**. Imagine uma zona de pesca, utilizada por um grupo de pescadores. Para simplificar, vamos considerar que cada barco empregado na pesca custa um mesmo valor c para cada pescador, com $c > 0$.

Suponhamos, para simplificar, que o preço de venda do peixe permanece constante, independentemente da quantidade de peixes pescados. Suponhamos também que o preço do peixe é 1 real, de forma que o valor da produção total de peixe (v) é igual à quantidade de pescado obtida (q), que, por sua vez, é função direta da quantidade total de barcos na zona pesqueira, n:

$$v = q = f(n)$$

Contudo, a cada novo barco na zona pesqueira, a quantidade de peixe disponível para os demais diminui, e, dessa forma, o valor total da produção de peixe, à medida que aumenta o número de barcos, cresce cada vez mais lentamente. Podemos supor até mesmo que, a partir de um número muito grande barcos, a produção total de pescado irá diminuir em termos absolutos.

O Gráfico 4.7, a seguir representa o comportamento do valor da produção total de peixe $f(n)$, que cresce com o aumento do número total de barcos; porém, esse crescimento se dá cada vez mais lentamente à medida que aumenta o número de barcos. Essa última propriedade – de que quando aumentamos a quantidade de um insumo qualquer utilizado na produção a quantidade produzida cresce em proporções cada vez menores – é conhecida na economia como **lei dos rendimentos marginais decrescentes**.

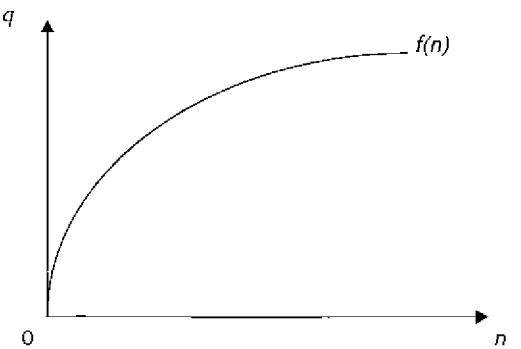


Gráfico 4.7 Produção Total com Rendimentos Decrescentes

Dada a presença da lei dos rendimentos marginais decrescentes, a produção máxima irá ocorrer quando:

$$\frac{df(n)}{dn} = f'(n) = c$$

Isto é, quando a derivada da função do valor total da produção, em relação à quantidade de insumo utilizada, for igual ao custo da unidade de insumo. Para entender por que isso ocorre, considere o Gráfico 4.8:

Observe o Gráfico 4.8. Nele temos duas curvas: a curva horizontal representa o custo de aquisição de um barco c – que é constante, qualquer que seja a quantidade de barcos na zona pesqueira (n). Temos uma outra função, decrescente, $f'(n)$, que representa o acréscimo ao produto total resultante de um pequeno aumento na quantidade total de barcos. Em outros termos, $f'(n)$ representa a **produtividade marginal** dos barcos pesqueiros.

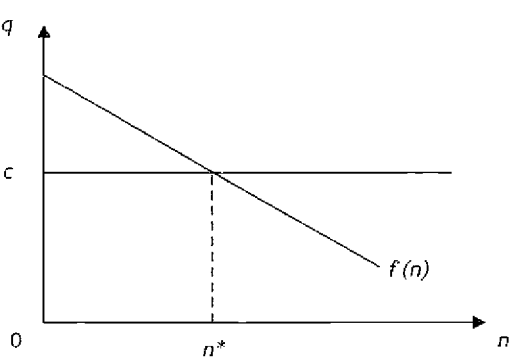


Gráfico 4.8

Vamos supor que existem milhares de barcos e, portanto, a adição de um barco a mais representa uma variação muito pequena, quase infinitesimal, em relação ao total de barcos. Assim, poderemos falar na adição de um barco a mais sem que isso necessariamente invalide o raciocínio em termos contínuos, conforme representado nas curvas $f(n)$ e $f'(n)$.

Considere agora o que está acontecendo à esquerda de n^*, a quantidade de barcos para a qual as curvas que representam c e $f'(n)$ se encontram. À esquerda de n^*, cada barco adicional gera um aumento no valor total produzido *maior* do que o custo de compra do barco c. Pode-se perceber isso porque a curva $f'(n)$ se encontra acima da curva c. Como cada barco está acrescentando um valor à produção total maior do que ele custa, é conveniente aumentar a quantidade total de barcos, pois isso aumenta os lucros dos pescadores.

O inverso acontece à direta de n^*: a adição ao valor da produção total, resultante de um barco a mais, se tornou *menor* do que o custo deste barco: do ponto de vista da lucratividade dos pescadores, não é conveniente adicionar mais um barco para a pesca. Assim, n^*, a quantidade de barcos para a qual o aumento do valor total da produção resultante da adição de um barco é exatamente igual ao custo deste barco é a quantidade para a qual o lucro total dos pescadores é máximo.

O leitor deve perceber que esse resultado foi obtido sem discutirmos o regime de propriedade em que os pescadores realizam a pesca. Apenas constatamos que, dado que cada barco adicional reduz a quantidade de peixe disponível para todos, existe um número ótimo de barcos, n^*, para o qual o *lucro agregado* dos pescadores é máximo.

O problema é que, se cada pescador dispõe apenas de seu barco e pode entrar com ele livremente na zona pesqueira, por que deveria se preocupar com o efeito do seu barco sobre a produção dos demais? De fato, se você é um dos pescadores, desde que o valor da produção de seu barco supere o valor que teve de pagar para comprá-lo, é vantajoso ir pescar!

A consequência é que o número de barcos crescerá até que o valor de produção de cada barco, isto é, a produção média, seja igual ao custo:

$$\frac{f(n)}{n} = c$$

Obviamente, nesse caso, temos uma situação ineficiente: ao passo que se o número de barcos é n^* os pescadores têm lucro, neste caso, em que cada barco está obtendo uma produção igual ao custo do barco, o lucro se reduz a zero. Note, entretanto, que *essa situação corresponde a um equilíbrio de Nash*: não há razão para um pescador deixar de levar seu barco para pescar, pois, se ele não o fizer, outro o fará.

Assim, a melhor resposta para um pescador, dado que outro pescador leve seu barco para a pesca, é também levar seu barco para pescar, ao menos enquanto for possível obter uma produção que seja, no mínimo, equivalente ao custo do barco.

Assim, todos pensam da mesma maneira e acabam por gerar um equilíbrio ineficiente, pois todos acabam perdendo quando não há limites ao acesso ao recurso que é utilizado em comum: a zona de pesca. Por isso, esse tipo de problema também é conhecido como "a tragédia dos comuns". O Gráfico 4.9 ilustra o resultado ineficiente, n^{**}, quando comparado com o resultado eficiente, n^{*}.

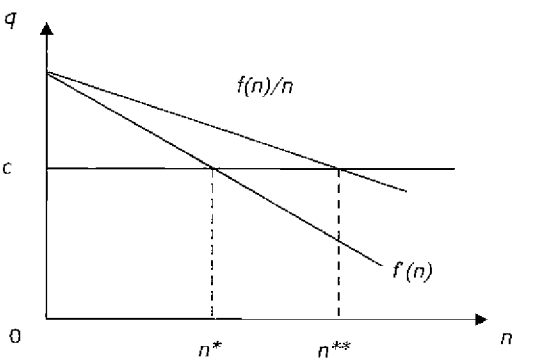


Gráfico 4.9

Por que isso acontece? Pelo fato de, nesse caso, existirem **externalidades.**

Diz-se que uma dada atividade gera **externalidades** quando as decisões de um agente geram custos ou benefícios para outros agentes, sem que o agente que gerou esses custos ou benefícios tenha de ressarcir os outros (no caso de gerar custos) ou ser remunerado por eles (no caso de benefícios).

Quando um pescador leva seu barco para pescar ele gera uma externalidade negativa (um custo) para os demais pescadores, já que afeta negativamente a produção dos demais. Contudo, ele não tem de ressarcir os demais pelo prejuízo que causa e, assim, acaba gerando um resultado que é subótimo, apesar de perfeitamente racional.[10]

O problema dos recursos comuns tem sido muito empregado para discutir questões relacionadas a práticas predatórias em relação ao meio ambiente e aos recursos naturais, chamando nossa atenção para a necessidade de se organizar melhor o acesso a esses recursos.

10 O exemplo clássico de externalidade que envolve benefícios é a vacinação pública. Cada indivíduo que é vacinado reduz as probabilidades daqueles que convivem com ele de contraírem a doença para a qual ele tomou a vacina. Mas os indivíduos que são indiretamente protegidos não remuneram o produtor da vacina pelos benefícios assim obtidos.

EXERCÍCIOS

4.1 Calcule o equilíbrio de Cournot para duas empresas em um mercado em que a função de demanda é dada por:

$$p = 122 - 0{,}5(q_1 + q_2)$$

E as funções de custo das duas empresas são dadas por:

$$C_1 = 2q_1$$
$$C_2 = 2q_2$$

4.2 Calcule o equilíbrio de Cournot e o lucro de cada empresa do exercício anterior, supondo agora que, em vez de duas, temos:

a. Uma única empresa
b. 39 empresas

4.3 Calcule o equilíbrio de Cournot e os lucros de cada empresa para o exercício 4.1, supondo agora que as funções de custos das empresas são dadas por:

$$C_1 = 0{,}5q_1$$
$$C_2 = q_2$$

4.4 Considere novamente as empresas com as funções de custo do exercício anterior. Compare os lucros que as empresas teriam se formassem um cartel com o lucro obtido no equilíbrio de Cournot.

4.5 Sejam as empresas duopolistas Vermelho S.A. e Azul S.A., em um mercado de um bem homogêneo, no qual a quantidade total demandada pelos consumidores, $D(p)$, é representada pela função de demanda:

$$D(p) = 120 - p$$

Sendo p o preço do bem homogêneo. Sabe-se que Vermelho e Azul têm idêntico custo total: $C(q_i) = 10q_i$, e que cada uma das empresas tem duas estratégias alternativas: vender 25 ou vender 36,7 unidades.

a. Explique o que significa, em termos de comportamento da empresa, produzir 27,5 unidades ou produzir 36,7 unidades.
b. Construa a forma estratégica para as quatro combinações de estratégias possíveis das duas empresas e determine o equilíbrio de Nash neste caso.
c. Qual é a relação desse jogo com o jogo do tipo dilema dos prisioneiros?

4.6 Considere um setor com duas empresas, cujas curvas de custo total são dadas por $CT_i(q_i) = 4q_i$, $i = 1, 2$; onde q_i é a quantidade produzida pela empresa i e $CT_i(q_i)$ é o custo total da em-

presa i. O bem produzido pelas duas empresas é homogêneo. A demanda de mercado é dada por $D(p) = 40 - p$, onde p é o preço.

a. Encontre as quantidades produzidas por cada empresa e o preço de equilíbrio, caso as empresas se comportem de forma não-cooperativa.
b. Determine o preço de equilíbrio e a quantidade ofertada por cada empresa considerando que existem cinco empresas que se comportam de acordo com o modelo de Cournot.
c. Encontre o preço e a quantidade total produzida de acordo com o modelo de Bertrand sem restrição de capacidade.

4.7 Construa a função de reação de uma empresa em um duopólio, segundo o modelo de Bertrand com restrição de capacidade, supondo uma função de demanda do mercado $q(p) = 220 - 2p$, e cada firma com capacidade máxima de produção de 150 unidades.

4.8 Sejam duas empresas que produzem bens diferenciados, designadas genericamente Empresa 1 e Empresa 2, sendo os custos totais de qualquer uma das empresas, CT_i, dados por: $CT_i = 2q_i, i = 1, 2$. As funções de demanda com que se defrontam as firmas podem ser representadas pelas funções $q_1 = 10 - p_1 + p_2$, para a Empresa 1, e $q_2 = 10 + p_1 - p_2$, para a Empresa 2, em que $p_i (i = 1,2)$ são os preços das duas empresas e $q_i (i = 1,2)$ são as quantidades produzidas e vendidas das duas empresas. Calcule os preços, as quantidades e os lucros de equilíbrio.

4.9 Imagine uma avenida com 1 quilômetro de extensão e duas lanchonetes, cada uma situada a 250 metros de um dos extremos da avenida e fazendo o mesmo hambúrguer. Há cem escritórios distribuídos uniformemente pela avenida, cada um deles encomendando um sanduíche na hora do almoço. Suponha que o preço de reserva dos escritórios para um hambúrguer é de 5 reais, que o custo unitário do sanduíche é de 1 real em qualquer uma das duas lanchonetes, e que o custo de entrega dos hambúrgueres é de 0,01 centavo por metro percorrido do entregador. Calcule o preço do sanduíche e qual será o lucro de cada lanchonete.

4.10 Suponha que foi descoberto ouro em uma região do interior do Brasil, à qual se tem livre acesso para garimpar. Suponha ainda que o preço do grama do ouro é 1 real, e que a produção total de ouro pode ser expressa como função do número de garimpeiros na forma: $f(n) = 20n - n^2$. Suponha que o custo do material para garimpagem é de 5 reais. Qual seria o número ótimo de garimpeiros no garimpo? Qual o número efetivo de garimpeiros, dado que o recurso comum é de livre acesso?

5

Jogos Estritamente Competitivos e Estratégias Mistas: Prevenindo-se no Conflito

Assim, contra os que sabem atacar, o inimigo ignora que local defender; contra os que sabem defender, o inimigo ignora que local atacar.

SUN TZU, GENERAL CHINÊS (APROX. SÉCULO IV A.C.)

INTRODUÇÃO

Este capítulo está voltado para duas perguntas que, em geral, caminham juntas. A primeira pergunta é: qual é a melhor forma de se enfrentar uma situação de interação estratégica em que o conflito de interesses é irreconciliável, como no caso de uma batalha militar? A segunda pergunta é: como posso evitar que o outro jogador me cause uma surpresa desagradável, especialmente se me encontro em uma situação de conflito?

Na verdade, o estudo formal da teoria dos jogos iniciou-se pela primeira pergunta. O livro de Von Neumann e Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, ao qual já fizemos referência no início deste livro ao discutirmos a história da teoria dos jogos, realizou grande parte de seus avanços teóricos no campo dos jogos em que os interesses dos jogadores enfrentam um conflito irreconciliável.

Esse tipo de jogo é conhecido como jogo estritamente competitivo ou jogo de soma zero, e será o primeiro tema a ser estudado neste capítulo. Também teremos oportunidade de discutir a aplicação desse tipo de jogo à política, ao estudarmos uma versão simplificada do jogo do apadrinhamento.

Nosso segundo assunto está diretamente ligado à citação de Sun Tzu que inicia este capítulo. Uma vez em conflito, como evitar que o inimigo nos surpreenda? Essa é a pergunta que motiva as estratégias mistas, o tópico seguinte da nossa discussão.

DE VOLTA À BATALHA DO MAR DE BISMARCK

Vamos retornar ao modelo apresentado no Capítulo 1, para analisar a batalha do mar de Bismarck. Vimos no Capítulo 1 que, em dezembro de 1942, o alto comando de guerra japonês decidiu transferir um grande reforço da China e do Japão para Lae, na Papua-Nova Guiné. Vimos também que a movimentação de um volume grande de tropas por mar tinha um risco elevado: o poderio aéreo aliado na área era muito forte.

Vimos que o comboio japonês dispunha de duas rotas alternativas: a rota pelo sul, que apresentava tempo bom e boa visibilidade, e a rota pelo norte, que apresentava tempo ruim e baixa visibilidade. As forças aliadas, por outro lado, somente possuíam aviões de reconhecimento para pesquisar uma rota por vez, sendo que a busca em qualquer uma das rotas fazia necessário um dia inteiro.

Dessa forma, se as forças aliadas enviassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque imediatamente. Porém, se mandassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeios. Se os japoneses escolhessem o sul e os aliados os localizassem prontamente, o bom tempo determinaria três dias de bombardeio. Se os japoneses tivessem escolhido a rota norte, ainda na melhor hipótese de que os aliados os localizassem logo no primeiro dia de buscas, o mau tempo permitiria apenas dois dias de bombardeio.

A pior situação para os aliados seria os japoneses terem escolhido a rota norte e os aliados a rota sul: os aliados perderiam um dia por iniciar a busca na rota errada e mais um dia pelo mau tempo da rota norte, o que resultaria em apenas um dia para bombardear o comboio.

Por último, se os japoneses escolhessem o sul e os aliados começassem sua busca pelo norte, os aliados perderiam um dia em função do engano e teriam mais dois dias de bombardeio à disposição. Reproduzimos abaixo, na Figura 5.1, o jogo da batalha do mar de Bismarck, assim como foi apresentado no Capítulo 1.

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	**Rota Sul**	**Rota Norte**
Busca Rota Sul no Primeiro Dia	3 dias de bombardeio	1 dia de bombardeio
Busca Rota Norte no Primeiro Dia	2 dias de bombardeio	2 dias de bombardeio

Figura 5.1 A Batalha do Mar de Bismarck

Na forma estratégica da Figura 5.1 foram listados os dias de bombardeio de acordo com a combinação de estratégias escolhidas pelas forças aliadas (representadas nas linhas) e pelo comboio japonês (representado nas colunas). Vimos no primeiro capítulo que, pela simples inspeção da forma estratégica da Figura 5.1, o melhor que os aliados tinham a fazer naquela situação era mandar os aviões fazerem a busca no primeiro dia pela rota norte.

Agora é o momento de conhecermos melhor os conceitos por trás daquela conclusão a que chegamos intuitivamente e o tipo de jogo que estamos analisando. O leitor deve ter notado que no jogo em que está sendo analisada a batalha do mar de Bismarck, as recompensas dos jogadores estão relacionadas de forma inversa: quando um deles ganha, o outro necessariamente perde.

Jogos em que as recompensas dos jogadores estão relacionadas de forma inversa, em que o que é um ganho para um dos jogadores é perda para o outro, e vice-versa, constituem uma classe especial de jogos, que vamos estudar agora: os jogos estritamente competitivos ou jogos de soma zero.

OS JOGOS ESTRITAMENTE COMPETITIVOS OU JOGOS DE SOMA ZERO

Até aqui estivemos supondo que os jogadores se preocupam exclusivamente com suas próprias recompensas, que resultam de um processo de interação estratégica. Mas e se os jogadores na verdade estiverem preocupados em inflingir o maior dano possível uns aos outros, de forma que o que for perda para um dos jogadores represente ganho para o outro? Esse pode ser o caso se duas empresas estiverem disputando, por exemplo, para aumentar suas participações em um dado mercado: o aumento de participação de uma empresa somente se dará à custa da redução na participação da outra.

Os jogos que correspondem a esse tipo de interação são conhecidos como **jogos estritamente competitivos**. Para definir com maior precisão o que se entende por jogos estritamente competitivos, considere dois jogadores, o jogador a e o jogador b. Seja U_a a função de recompensa que, para cada combinação de estratégias dos jogadores a e b, determina a recompensa do jogador a, e U_b a função de recompensa que, para cada combinação de estratégias dos jogadores a e b, determina a recompensa do jogador b.

Seja então um par qualquer de estratégias do jogador a, representado por (s_i^a, s_j^a), e seja um par qualquer de estratégias do jogador b, representado por (s_i^b, s_j^b). Para que o jogo seja estritamente competitivo, é necessário que:

$$U_a\,(s_i^a, s_j^b) \geq U_a\,(s_j^a, s_i^b) \text{ se, e somente se, } U_b\,(s_j^a, s_i^b) \geq U_b\,(s_i^a, s_j^b)$$

Em outras palavras, uma combinação de estratégias fornece uma recompensa maior ou igual à outra combinação de estratégias para um dos jogadores, se o inverso acontecer com o outro jogador.

A relação "maior ou igual" (≥) apresenta duas características importantes para compreendermos a natureza de um jogo estritamente competitivo. A primeira delas é a de que, para dois números quaisquer x e y, temos de:

$$\text{Se } x \geq y \text{ e } y \geq x, \text{ então: } x = y$$

Ou seja, se um número é maior ou igual a outro, e se esse segundo número é maior ou igual ao primeiro, os dois números têm de ser iguais.

Logo, se é verdade para o jogador b que:

$$U_b\,(s_j^a, s_i^b) = U_b\,(s_i^a, s_i^b)$$

Temos de ter simultaneamente:

$$U_b\,(s_i^a, s_j^b) \geq U_b\,(s_j^a, s_i^b) \text{ e}$$

$$U_b\,(s_j^a, s_i^b) \geq U_b\,(s_i^a, s_j^b)$$

Mas isso implica que, para o jogador a, também vale:

$$U_a\,(s_j^a, s_i^b) \geq U_a\,(s_i^a, s_j^b) \text{ e}$$

$$U_a\,(s_i^a, s_j^b) \geq U_a\,(s_j^a, s_i^b)$$

E, desse modo:

$$U_a\,(s_i^a, s_j^b) = U_a\,(s_j^a, s_i^b)$$

Assim, em um jogo estritamente competitivo, tem-se de:

$$U_a\,(s_i^a, s_j^b) = U_a\,(s_j^a, s_i^b) \text{ se, e somente se, } U_b\,(s_i^a, s_j^b) = U_b\,(s_j^a, s_i^b)$$

Isso significa que um dos jogadores somente é indiferente entre os resultados de duas combinações de estratégias se o outro jogador também o for.

A segunda propriedade da relação "maior ou igual" (≥) que é importante para entendermos as características de um jogo estritamente competitivo é a de que, novamente, para dois números quaisquer x e y:

Se $x \geq y$, mas não $y \geq x$, então: $x > y$

Ou seja, se um número é pelo menos tão grande quanto outro, mas este segundo número não é tão grande quanto o primeiro, isso somente pode significar que o primeiro número é maior do que o segundo. Em função dessa propriedade, temos de:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) > U_a(s_i^a, s_j^b) \text{ se, e somente se, } U_b(s_i^a, s_j^b) > U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Isso porque, se é verdade que para o jogador b:

$$U_b(s_i^a, s_i^b) > U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Então temos de, para esse jogador:

$$U_b(s_i^a, s_i^b) \geq U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Mas não:

$$U_b(s_i^a, s_i^b) \leq U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Pela própria definição de jogos estritamente competitivos, temos então que para o jogador a:

$$U_a(s_i^a, s_i^b) \leq U_a(s_i^a, s_j^b)$$

Mas não:

$$U_a(s_i^a, s_i^b) \geq U_a(s_i^a, s_j^b)$$

Donde conlcui-se que:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) > U_a(s_j^a, s_i^b)$$

Ou seja, se um dos jogadores prefere estritamente uma combinação de resultados a outra, o outro jogador prefere esta segunda combinação de estratégias à primeira.

Essa característica, em primeiro lugar, é o que nos permite escrever os jogos estritamente competitivos indicando apenas as recompensas de um dos jogado-

res. Como o resultado que um dos jogadores mais prefere é exatamente o resultado que o outro jogador menos prefere, podemos escrever a recompensa de um dos jogadores como sendo a recompensa do outro jogador, *com o sinal trocado*. Em termos algébricos, podemos fazer:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) = -U_b(s_i^a, s_j^b)$$

É evidente, portanto, que, uma vez definidas as recompensas dos jogadores dessa maneira, resulta que, se somarmos as recompensas dos dois jogadores, a soma será zero. Algebricamente:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) + U_b(s_i^a, s_j^b) = 0$$

Por esse motivo, os jogos estritamente competitivos são também conhecidos como **jogos de soma zero**.

Poderíamos, assim, ter escrito o jogo da batalha do mar de Bismarck da seguinte forma:

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	**Rota Sul**	**Rota Norte**
Busca Rota Sul no Primeiro Dia	3, –3	1, –1
Busca Rota Norte no Primeiro Dia	2, –2	2, –2

Figura 5.1 (a) A Batalha do Mar de Bismarck

Na Figura 5.1 (a) apresentamos a forma estratégica do jogo da batalha do mar de Bismarck da maneira usual, com as recompensas do jogador que se encontra nas linhas (as forças aliadas) em primeiro lugar e as recompensas do jogador que se encontra nas colunas (o comboio japonês) em segundo lugar.

Obviamente, uma vez que saibamos que se trata de um jogo estritamente competitivo, a repetição da recompensa do jogador que está nas linhas, com o sinal trocado, para o jogador que está nas colunas, torna-se supérflua. Por essa razão, em geral adota-se o procedimento mais simples de indicar apenas a recompensa do jogador que se encontra nas linhas.[1]

1 Mas voltaremos a apresentar as recompensas dos dois jogadores ao estudarmos estratégias mistas em jogos estritamente competitivos, para facilitar a apresentação.

A característica dos jogos estritamente competitivos de que $U_a(s_i^a, s_j^b) > U_a(s_i^a, s_j^b)$ se, e somente se, $U_b(s_i^a, s_j^b) > U_b(s_i^a, s_j^b)$, é também muito importante porque nos permitirá distinguir um jogo estritamente competitivo de um jogo que não é estritamente competitivo. Isso na medida em que essa característica impõe a condição de que, para que um jogo seja estritamente competitivo, *não haja combinação de estratégias preferível a qualquer outra para os dois jogadores simultaneamente*.

É fácil ver que no jogo da batalha do mar de Bismarck essa condição é satisfeita: o resultado de qualquer combinação de estratégias que é preferível para as forças aliadas nunca é preferível para a marinha japonesa. Mas vejamos agora um outro jogo.

Considere a seguinte situação de interação estratégica: dois países, com arsenais nucleares para se destruírem mutuamente várias vezes vivem uma situação de confronto político. Cada um dos dois países possui duas estratégias: ameaçar ou não ameaçar usar suas armas nucleares ao tentar conseguir concessões políticas do seu adversário (por exemplo, ao tentar impedir que o adversário financie o estabelecimento de mísseis nucleares em um país vizinho ao seu, com capacidade de atingir seu território em poucos minutos).

Essa situação se aproxima muito daquela vivida por Estados Unidos e União Soviética do final da Segunda Guerra até o início dos anos 1990, quando a União Soviética se extinguiu, e que ficou conhecida como guerra fria. A representação desse tipo de situação se encontra na Figura 5.2 em um jogo que chamaremos de jogo da guerra fria.

	União Soviética	
Estados Unidos	**Ameaça**	**Não Ameaça**
Ameaça	−100, −100	10, −10
Não Ameaça	−10, 10	0, 0

Figura 5.2 O Jogo da Guerra Fria

Nesse jogo, como podemos ver na Figura 5.2, se nenhum dos dois países ameaça o outro, a situação internacional permanece estável, sem nenhum ganho ou perda para qualquer um dos dois países. Isso foi representado na forma estratégica da Figura 5.2 com a recompensa zero (nenhum ganho ou perda para qualquer um dos dois países).

Se um dos países ameaça o outro com suas armas nucleares, enquanto o outro não o imita, o país que adotou a postura agressiva consegue exercer uma

pressão política eficaz, o que representamos como uma recompensa positiva de 10, enquanto o país que não ameaçou com o uso de armas nucleares perde a capacidade de defender seus interesses na política internacional, o que representamos com uma recompensa negativa de 10.

Por último, se ambos ameaçam com a utilização de seu arsenal nuclear, o clima de tensão internacional é tão grande que basta um leve incidente (como um sinal de radar mal-interpretado) para deflagrar uma guerra termonuclear que resulte, muito provavelmente, em uma aniquilação mútua. Nesse caso, atribuímos a ambos perdas de 100.[2] Esse é um jogo estritamente competitivo?

Para responder a essa pergunta, basta aplicar a condição de que $U_a(s_i^a, s_j^b) > U_a(s_i^a, s_i^b)$ se, e somente se, $U_b(s_i^a, s_j^b) > U_b(s_i^a, s_i^b)$; ou seja, basta aplicar a condição dos jogos estritamente competitivos, de não haver combinação de estratégias preferível a qualquer outra para os dois jogadores simultaneamente. Essa condição se aplica ao jogo da guerra fria da Figura 5.2?

A resposta é *não*. Para entender a razão disso, considere a combinação de estratégias em que os dois jogadores ameaçam usar seus arsenais nucleares, e cada um tem uma recompensa de –100. *Ambos os países, simultaneamente, preferem todas as demais combinações de estratégias àquela em que os dois se ameaçam simultaneamente.*

Assim, não é verdade, nesse jogo, que se o resultado de uma combinação de estratégias é preferível a outro resultado para um dos jogadores, isso significa que esse último resultado é preferível ao primeiro resultado para o outro jogador. Esse *não* é um jogo estritamente competitivo.[3]

BOX 5.1

A Guerra É um Jogo Estritamente Competitivo?

Neste capítulo discutimos uma batalha, a batalha do mar de Bismarck, como um jogo estritamente competitivo. Parece então razoável perguntar se a guerra, como um todo, é um jogo estritamente competitivo ou um jogo de soma zero.

A resposta a essa pergunta não é simples. R. D. Luce e H. Raiffa, em seu livro clássico *Games and Decisions* (Nova York, Dover Publications, 1985), um livro antigo, mas

---

2 Provavelmente o leitor deve estar estranhando o significado de uma recompensa de –100 para uma combinação de estratégias que leva à derrocada mútua. É importante não esquecer que as recompensas dos jogadores representam *simbolicamente* o ordenamento das suas preferências. Assim, tudo o que estamos fazendo é sinalizar que, para ambos os jogadores, a combinação de estratégias em que os dois países decidem se ameaçar mutuamente gera para cada país uma recompensa que é muito inferior a qualquer outra.

3 Nos exercícios no final deste capítulo o leitor é convidado a testar outros jogos, para determinar se são estritamente competitivos ou não.

que contém uma das melhores discussões acerca de jogos estritamente competitivos que conheço, na página 59 explicam que:

> *Alguém poderia ser tentado a considerar a guerra o exemplo mais extremo de conflito de interesses, mas em nível global ela provavelmente não é estritamente competitiva, uma vez que ambas as facções presumivelmente preferem um empate à aniquilação mútua.*

A percepção de que a guerra pode não ser adequadamente representada como um jogo estritamente competitivo foi formulada nos anos da guerra fria entre os Estados Unidos e a extinta União Soviética. Era óbvio para as duas superpotências que qualquer outro resultado era preferível à total destruição mútua em uma guerra termonuclear global.

Já Thomas C. Schelling, que em 2005 dividiu o Prêmio Nobel de Economia com o também teórico de jogos Robert J. Aumann, observava logo na página 5 de seu principal livro, *The Strategy of Conflict* (Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1960), que:

> *Se uma guerra até o fim se tornou inevitável, não restará nada além de puro conflito; mas se há qualquer possibilidade de se evitar uma guerra mutuamente danosa, de se conduzir a guerra de uma forma que sejam minimizados os danos, ou de se coagir o inimigo ameaçando fazer a guerra em vez de efetivamente fazê-la, a possibilidade de acomodação mútua é tão importante e dramática quanto o elemento de conflito.*

Assim, quando se considera a possibilidade de *dissuasão* do inimigo, não mais parece adequado representar a guerra como um jogo estritamente competitivo. Na verdade, até mesmo a representação de uma batalha como um jogo estritamente competitivo, da forma como será feito neste capítulo, exige cuidado (por exemplo, pode ser mais interessante para os dois lados evitar a batalha do que lutar).

Caracterizados assim os jogos estritamente competitivos, vejamos como podemos analisá-los. Os conceitos necessários à análise da solução de um jogo estritamente competitivo constituirão nosso próximo assunto.

ANALISANDO O EQUILÍBRIO EM JOGOS ESTRITAMENTE COMPETITIVOS: MINIMAX E MAXIMIN

Qual é a melhor atitude para um jogador que se encontra em uma situação de interação estratégica que pode ser representada como um jogo estritamente competitivo? Nesse tipo de situação, cada jogador está tomando suas decisões procurando causar o maior dano possível ao outro jogador. Uma atitude estratégica

prudente, assim, parece ser a de cada jogador tentar minimizar o dano que o outro jogador pode lhe causar.

Vamos então considerar que os dois jogadores estão adotando essa abordagem estratégica mais prudente no momento de escolher suas estratégias. Vamos representar o que pode acontecer de pior para o jogador que está nas colunas como a maior recompensa em cada linha (o leitor não deve esquecer que adotamos a convenção de apresentar na forma estratégica dos jogos estritamente competitivos apenas as recompensas do jogador que está nas linhas).

Considere então, de modo geral, uma forma estratégica com s linhas e t colunas. A maior recompensa (sempre do jogador que está nas linhas, que é o único a ter suas recompensas apresentadas) em uma coluna qualquer t' é representada pela expressão abaixo:

$$\max_{s} U(s, t')$$

O leitor não deve se confundir com a expressão anterior. Representando $U(s, t)$ a recompensa da combinação de estratégias constituída pela estratégia na linha s e pela estratégia na coluna t, a expressão anterior representa o valor máximo nas linhas s das recompensas em uma *dada coluna t'*.

O leitor também deve observar que, na expressão anterior, não indicamos a que jogador a função de recompensa U se refere. Isso não é necessário, pois, como adotamos a convenção de que somente as recompensas do jogador que se encontra nas linhas serão apresentadas, está implícito que a função U se refere ao jogador que se encontra nas linhas.

O que significa essa expressão que acabamos de ver? Ao calcularmos $\max_{s} U(s, t')$ *estamos calculando o que de pior pode acontecer para o jogador que se encontra nas colunas, caso ele escolha jogar a estratégia representada na coluna t'*. Isso porque, como estamos representando na forma estratégica apenas as recompensas do jogador que se encontra nas linhas, e como o jogo é estritamente competitivo, a recompensa mais elevada para o jogador que está nas linhas significa, simultaneamente, a recompensa mais baixa para o jogador que está nas colunas.

Vamos agora representar a menor recompensa na linha s', após considerarmos todas as colunas da matriz de recompensa, como sendo:

$$\min_{t} U(s', t)$$

Representando sempre $U(s, t)$ a recompensa da combinação de estratégias constituída pela estratégia na linha s e pela estratégia na coluna t, a expressão anterior representa o valor mínimo nas colunas t das recompensas em uma dada linha s'.

O que significam, conceitualmente, em um jogo estritamente competitivo, essa nova expressão?

Ao calcularmos $\min_t U(s', t)$ *estamos calculando o que de pior pode acontecer para o jogador que se encontra nas linhas, caso ele escolha jogar a estratégia representada na linha* s'. Sempre lembrando que estamos representando na forma estratégica apenas as recompensas do jogador que se encontra nas linhas e, sendo o jogo estritamente competitivo, a recompensa mais baixa para o jogador que está nas linhas significa a recompensa mais alta para o jogador que está nas colunas.

Vamos aplicar essas duas formulações ao jogo da batalha do mar de Bismarck, que reproduzimos novamente na Figura 5.1 (b):

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	**Rota Sul (t_1)**	**Rota Norte (t_2)**
Busca Rota Sul no Primeiro Dia (s_1)	3	1
Busca Rota Norte no Primeiro Dia (s_2)	2	2

Figura 5.1 (b) A Batalha do Mar de Bismarck – Calculando o Minimax e o Maximin

Vejamos inicialmente as maiores recompensas em cada coluna, considerando todas as linhas. Vamos chamar a primeira linha, em que os aliados decidem iniciar sua busca pelo sul, de s_1, e a segunda linha, em que os aliados decidem iniciar a busca pelo norte, de s_2. Também vamos chamar de t_1 a primeira coluna, em que o comboio japonês escolhe a rota sul, e de t_2 a segunda coluna, em que o comboio japonês escolhe a rota norte.

Temos então que:

$$\max_s U(s, t_1) = (s_1, t_1) = 3$$

$$\max_s U(s, t_2) = (s_2, t_2) = 2$$

Ou seja, a maior recompensa para os aliados (e a pior para os japoneses), no caso em que comboio escolhe a rota sul, é representada por três dias de bombardeio: $(s_1, t_1) = 3$. Já o maior valor de recompensa para os aliados e, portan-

to, o pior para os japoneses, caso o comboio decida pela rota norte, são dois dias de bombardeio: (s_2, t_2).

As células da matriz de recompensa que correspondem a $\max_s U(s, t_1) = (s_1, t_1) = 3$ e a $\max_s U(s, t_2) = (s_2, t_2) = 2$ se encontram assinaladas com um quadrado na Figura 5.1 (c):

Forças Aliadas	Comboio Japonês	
	Rota Sul (t_1)	Rota Norte (t_2)
Busca Rota Sul no Primeiro Dia (s_1)	3	1
Busca Rota Norte no Primeiro Dia (s_2)	2	2

Figura 5.1 (c) A Batalha do Mar de Bismarck – Calculando o Minimax e o Maximin

O passo seguinte é encontrar a menor entre essas duas recompensas, ou seja, após encontrarmos as maiores recompensas de cada coluna (consideradas todas as linhas), devemos procurar o menor valor de todas as colunas. Ou seja, devemos encontrar:

$$\min_t \left\{ \max_s U(s, t) \right\}$$

É fácil concluir que:

$$\min_t \left\{ \max_s U(s, t) \right\} = (s_2, t_2) = 2$$

A expressão nos indica que a recompensa de 2, que corresponde à combinação de estratégias em que os aliados iniciam a busca pelo norte no primeiro dia e o comboio japonês escolhe a rota norte, é o **valor minimax** do jogo da batalha do mar de Bismarck: é o valor que representa o *menor* dano que o comboio japonês pode *garantir*, dadas suas opções e as opções dos aliados.

A chave da questão está na palavra *garantir*, empregada anteriormente. Note que a outra opção, que seria o comboio japonês escolher a rota sul, não tem como *garantir* um menor dano. No caso da rota sul, se os aliados iniciassem a busca pelo sul, os japoneses obteriam seu pior resultado: três dias de bombardeio. Como os japoneses não sabem o que os aliados escolherão, o melhor que podem fazer, se decidirem agir com cautela, é escolher a rota norte.

Vamos agora examinar as menores recompensas em cada linha, considerando todas as colunas. Temos então que:

$$\min_t U(s_1, t) = (s_1, t_2) = 1$$

$$\min_t U(s_2, t) = (s_2, t_1) = (s_2, t_2) = 2$$

Na primeira linha, a menor recompensa que os aliados podem obter é aquela que resulta do comboio japonês ter escolhido a rota norte e os aliados iniciarem sua busca pela rota sul, em que os aliados conseguem apenas um dia de bombardeio, ou seja, $(s_1, t_2) = 1$.

Já na segunda linha, quando os aliados escolhem iniciar as buscas pelo norte, tanto no caso do comboio japonês escolher a rota sul, como no caso do comboio escolher a rota norte, o resultado é o mesmo: dois dias de bombardeio. Nesse caso, as duas combinações de estratégias são escolhidas como o mínimo da linha: $(s_2, t_1) = (s_2, t_2) = 2$

As células da matriz de recompensa que correspondem a $\min_t U(s_1, t) = (s_1, t_2) = 1$ e a $\min_t U(s_2, t) = (s_2, t_1) = (s_2, t_2) = 2$ encontram-se assinaladas com um asterisco na Figura 5.1 (d):

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	**Rota Sul (t_1)**	**Rota Norte (t_2)**
Busca Rota Sul no Primeiro Dia (s_1)	3	1*
Busca Rota Norte no Primeiro Dia (s_2)	2*	2*

Figura 5.1 (d) A Batalha do Mar de Bismarck – Calculando o Minimax e o Maximin

Temos agora de encontrar a maior dentre essas recompensas, ou seja, após encontrarmos as menores recompensas de cada linha (consideradas todas as colunas), devemos procurar o maior valor de todas as linhas. Ou seja, devemos encontrar:

$$\max_s \left\{ \min_t U(s, t) \right\}$$

É fácil ver que:

$$\max_s \left\{ \min_t U(s, t) \right\} = (s_2, t_1) = (s_2, t_2) = 2$$

A expressão anterior indica que a recompensa de 2, que corresponde tanto à combinação de estratégias em que aos aliados iniciam a busca pelo norte e o comboio japonês escolhe o sul, como à combinação de estratégias em que os aliados e o comboio escolhem o norte, é o **valor maxmin do jogo da batalha do mar de Bismarck: é o valor que representa o** *maior* dano que os aliados podem *garantir*, dadas as suas opções e as opções da marinha japonesa.

Quando as escolhas baseadas nesses critérios de segurança coincidem, ou seja, quando a combinação de estratégias para as quais o máximo entre os mínimos que o jogador nas linhas pode obter for a mesma para a qual o jogador nas colunas obtém o mínimo entre os máximos, temos de:

minimax nas colunas* = *maximin nas linhas, ou seja:

$$\min_{t}\left\{\max_{s}U(s,t)\right\} = \max_{s}\left\{\min_{t}U(s,t)\right\}$$

Sempre que isso ocorrer em alguma combinação de estratégias, teremos encontrado o equilíbrio de um jogo estritamente competitivo. Quando ocorre que, para uma dada combinação de estratégias em um jogo estritamente competitivo, temos de ***maximin* = *minimax***, diz-se que essa combinação de estratégias é um **ponto de sela**.[4]

No caso do jogo da batalha do mar de Bismarck, temos de:

$$\min_{t}\left\{\max_{s}U(s,t)\right\} = \max_{s}\left\{\min_{t}U(s,t)\right\} = (s_2, t_2) = 2$$

Ou seja, existe uma combinação de estratégias que, ao mesmo tempo, garante ao comboio japonês o mínimo de dias de bombardeios, entre os piores resultados que pode sofrer, e garante às forças aliadas o máximo possível entre o mínimo de dias de bombardeio que seus aviões podem obter. Como vimos no Capítulo 1, foi exatamente o que aconteceu na batalha do mar de Bismarck.[5]

---

4 O nome *ponto de sela* deriva da analogia das recompensas no equilíbrio com o desenho de uma sela de cavalo. Observada longitudinalmente, o centro é o ponto mais baixo da sela. Porém, ao olharmos lateralmente, o centro é o ponto mais alto da sela. A ideia de ponto de sela é aplicada assim a um dado valor de uma função matemática que é, de um ponto de vista, um mínimo, e de outro, um máximo.

5 Isso obviamente não significa que o comando aliado no Pacífico e a marinha japonesa aplicaram o método minimax – maximin para tomar suas decisões. Significa, isso sim, que o modelo que estudamos nos permite compreender a lógica da situação, como discutimos no Capítulo 1.

É importante notar que o equilíbrio maximin-minimax também é um equilíbrio de Nash. Com efeito, uma vez que os jogadores estejam convencidos de que ambos estão buscando causar o maior dano possível um ao outro, a melhor resposta a isso somente pode ser minimizar suas perdas. Daí esse método também ser conhecido pela forma mais abreviada de método **minimax**.

Contudo, o leitor deve estar prevenido de que, assim como no caso dos jogos que não são estritamente competitivos, nem sempre haverá um equilíbrio de Nash em jogos estritamente competitivos, ou seja, nem sempre encontraremos um ponto de sela. Antes, porém, de discutirmos esse caso, vamos estudar uma outra aplicação interessante do conceito de jogos estritamente competitivos.

O Jogo do Apadrinhamento

Veremos agora um outro jogo estritamente competitivo, para ilustrar algumas aplicações desse tipo de jogo a situações de interação estratégica, assim como a forma de analisar esse tipo de jogo. Estudaremos o "jogo do apadrinhamento", que é uma aplicação interessante de jogos estritamente competitivos à análise política.

Considere, portanto, o seguinte jogo:[6] dois candidatos a um cargo majoritário (como, por exemplo, um governo estadual) estão decidindo se se comprometem ou não a apadrinhar seus cabos eleitorais, oferecendo a eles empregos públicos caso vençam as eleições.

Se os candidatos prometem a seus cabos eleitorais empregos públicos, isso faz com que eles trabalhem com muito mais empenho na eleição, o que contribui para aumentar as chances dos candidatos de serem eleitos. Por outro lado, uma parcela do eleitorado não aprova esse tipo de promessa, pois esses eleitores zelam pela eficiência e qualidade do serviço público.

Suponha que, uma vez que o candidato tenha prometido empregos públicos a seus cabos eleitorais, ele não tem como deixar de cumprir a promessa (podemos supor que há um efeito de reputação muito negativo, e o candidato que não honra sua promessa pode ter dificuldades na próxima eleição para conseguir cabos eleitorais dispostos a trabalhar em sua campanha).

Um dos candidatos é de oposição, o que significa que ele precisa de um apoio significativo dos cabos eleitorais para ser conhecido pela população. O candidato da situação não precisa tanto desse apoio, pois tem a seu favor as obras executadas pelo governo de seu partido. Esse jogo se encontra descrito

---

6 Esse jogo é uma versão simplificada do jogo de apadrinhamento (do inglês, *game of patronage*) apresentado por James D. Morrow em seu livro *Game Theory for Political Scientists* (Princeton, NJ, Princeton University Press, 1994).

na forma estratégica a seguir, na qual apresentamos apenas as recompensas do candidato de oposição, expressas como *porcentual* de chance de vitória em função das suas escolhas e do candidato da situação:

	Candidato da Situação	
Candidato da Oposição	**Promete**	**Não Promete**
Promete	50%	60%
Não Promete	20%	40%

Figura 5.3 (a) O Jogo do Apadrinhamento

A partir da Figura 5.3 (a), é fácil perceber por que os jogos estritamente competitivos são chamados de jogos de soma zero. Basta considerar, inicialmente, que a soma dos porcentuais de votos dos dois candidatos necessariamente soma 100%. Assim, se o candidato da oposição e o candidato da situação prometem empregos públicos, cada um terá 50% de chances de ganhar a eleição.

Dado esse valor constante das somas das recompensas, se tivéssemos colocado as recompensas dos dois candidatos, teríamos, em vez da Figura 5.3 (a), a Figura 5.3 (b):

	Candidato da Situação	
Candidato da Oposição	**Promete**	**Não Promete**
Promete	50%, 50%	60%, 40%
Não Promete	20%, 80%	40%, 60%

Figura 5.3 (b) O Jogo do Apadrinhamento com as Recompensas dos Dois Jogadores

Agora, ao subtrairmos das recompensas *do segundo jogador* o valor constante da soma das recompensas, isto é, 100%, obtemos na Figura 5.3 (c):

	Candidato da Situação	
Candidato da Oposição	**Promete**	**Não Promete**
Promete	50%, - 50%	60%, – 60%
Não Promete	20%, - 20%	40%, – 40%

Figura 5.3 (c) O Jogo do Apadrinhamento com as Recompensas dos Dois Jogadores

Na Figura 5.3 (c), a soma das recompensas dos jogadores, para qualquer combinação de estratégias, é sempre zero. Desse modo, mais uma vez percebemos que é possível apresentar um jogo estritamente competitivo como um jogo de soma zero, subtraindo das recompensas de um jogador (preferencialmente o segundo) o valor constante da soma das recompensas. Contudo, também vamos optar aqui pela representação mais simples da Figura 5.3 (a), deixando implícita a recompensa do segundo jogador.

Vejamos como interpretar a forma estratégica da Figura 5.3 (a). Nela vemos que se o candidato da oposição não promete empregos públicos a seus cabos eleitorais enquanto o candidato da situação promete, na célula inferior esquerda as chances do candidato de oposição ganhar a eleição são de 20%. Por que não apresentamos as chances do candidato da situação?

Simplesmente porque se naquela situação as chances do candidato de oposição são de apenas 20%, isso significa que as chances do candidato da situação são de 100% – 20% = 80%, uma vez que ambos os candidatos concorrem ao mesmo cargo e apenas um será eleito. Não precisamos, assim, apresentar as recompensas dos dois candidatos: basta apresentar as recompensas do jogador que está nas linhas (o candidato da oposição) e não esquecer que *enquanto o jogador que está nas linhas busca maximizar essas recompensas, o jogador que está nas colunas busca minimizá-las.*

Vejamos agora como resolver esse jogo. Cada candidato sabe que o outro busca minimizar sua recompensa. Isso significa que o jogador que se encontra nas linhas (o candidato da oposição) sabe que o jogador que está nas colunas (o candidato da situação) busca as estratégias que, *dada a estratégia escolhida do candidato da oposição*, minimizam a recompensa deste último.

O candidato da situação sabe, por outro lado, que dada uma escolha sua, o jogador que está nas linhas (o candidato da oposição) buscará aquela estratégia que, dada a escolha do candidato da situação por uma estratégia, ou seja, por uma coluna, maximiza a recompensa do seu adversário, isto é, a recompensa do candidato da oposição. Esses valores estão identificados com um quadrado na Figura 5.3 (d):

	Candidato da Situação	
Candidato da Oposição	**Promete**	**Não Promete**
Promete	50%	60%
Não Promete	20%	40%

Figura 5.3 (d) O Jogo do Apadrinhamento: os Valores para o Minimax

Assim, assinalamos com um asterisco na Figura 5.3 (e) os valores mínimos em cada linha do candidato da oposição, que ele identifica como sendo os objetivos que norteariam as escolhas do candidato da situação para minimizar as chances do candidato da oposição de ser eleito, de acordo com as escolhas deste último:

	Candidato da Situação	
Candidato da Oposição	**Promete**	**Não Promete**
Promete	50%*	60%
Não Promete	20%*	40%

Figura 5.3 (e) O Jogo do Apadrinhamento: os Valores para o Maximin

Como os jogadores devem agir nessa situação?

Como o candidato da situação sabe que, para cada estratégia que escolher nas colunas, o candidato da oposição irá escolher a linha que maximize suas recompensas, ele deve selecionar aquela coluna que, quando o candidato da oposição escolher a linha que maximiza suas recompensas dada a coluna escolhida, proporcione ao candidato da situação as maiores chances de vitória. Em outras palavras, o candidato da situação deve escolher a coluna que apresenta o menor valor dentre os valores máximos, ou seja, o *minimax*.

De forma inversa, como o candidato da oposição sabe que, para cada estratégia que escolher nas linhas, o candidato da situação tentará escolher a coluna que minimize suas recompensas, ele prudentemente deve selecionar aquela linha que, quando o candidato da situação escolher a coluna que minimiza as suas recompensas dada a linha escolhida, proporcione ao candidato da oposição as maiores chances de sucesso. Dessa forma, o candidato de oposição deve escolher a linha que apresenta o maior valor dentre os valores mínimos que ele pode obter, ou seja, o seu *maximin*.

É fácil perceber que o equilíbrio nesse jogo estritamente competitivo que, conforme vimos, é dado quando maximin = minimax, é encontrado quando os dois jogadores decidem prometer apadrinhar os seus cabos eleitorais, que corresponde à célula localizada na primeira linha e na primeira coluna da forma estratégica da Figura 5.3 (f):

	Candidato da Situação	
Candidato da Oposição	**Promete**	**Não Promete**
Promete	50%*	60%
Não Promete	20%*	40%

Figura 5.3 (f) O Jogo do Apadrinhamento – Igualdade Maximin-Minimax

Nos dois casos de jogos estritamente competitivos que estudamos (a batalha do mar de Bismarck e o jogo do apadrinhamento), encontramos sem dificuldades o equilíbrio desses jogos. Algumas vezes, um jogo estritamente competitivo pode apresentar mais de um equilíbrio: no exercício 5.1, no final deste capítulo, o leitor poderá constatar esse fato.

Conforme alertamos anteriormente, também há situações em que um jogo estritamente competitivo não apresenta nenhum equilíbrio, quando aplicamos o método *minimax*. Para ilustrar esse tipo de situação, considere que dois países estão em guerra. Vamos chamar um dos países de país Azul, e o outro, de país Vermelho. Vamos supor que o país Azul possui dois portos, os quais chamaremos de Porto Sul e Porto Norte, e que há informações seguras de que um dos dois portos sofrerá um ataque aéreo de Vermelho, mas não foi possível descobrir qual.

O país Azul dispõe de aviões apenas para defender um dos portos: qualquer divisão de aviões entre os portos resultaria em derrota para Azul, qualquer que fosse o porto atacado. Porém, o país Vermelho não tem como saber qual dos dois portos o país Azul decidiu proteger. Assim, podemos tratar essa situação como um jogo simultâneo. Como os interesses dos dois países são antagônicos, pois enquanto o país Azul pretende defender o porto do ataque, o país Vermelho deseja realizar o ataque com sucesso, também podemos considerar esse jogo como sendo estritamente competitivo.

Por último, vamos considerar que qualquer um dos dois portos tem o mesmo valor estratégico tanto para Azul como para Vermelho. Desse modo, representaremos um ataque bem-sucedido como uma vitória para Vermelho (recompensa 1) e uma derrota para Azul (recompensa –1), não importando em qual porto o ataque se deu. Inversamente, um ataque repelido com sucesso é uma derrota para Vermelho (recompensa –1) e uma vitória para Azul (recompensa 1).

Assim, chamaremos essa situação de interação estratégica de jogo de prevenção de ataque, e sua representação se encontra na Figura 5.4:

	Vermelho	
Azul	**Porto Sul**	**Porto Norte**
Porto Sul	1	–1
Porto Norte	–1	1

Figura 5.4 O Jogo de Prevenção de Ataque

Vamos aplicar o método *minimax – maximin* a esse jogo, e ver se conseguimos identificar algum equilíbrio. Inicialmente, para acharmos o valor *mini-*

max, assinalaremos os valores mais elevados nas colunas com um quadrado, na Figura 5.4 (a):

	Vermelho	
Azul	**Porto Sul**	**Porto Norte**
Porto Sul	[1]	−1
Porto Norte	−1	[1]

Figura 5.4 (a) O Jogo da Prevenção de Ataque – Calculando o Minimax

O passo seguinte é tomar o menor valor entre as recompensas selecionadas, de forma a obter os valores *minimax*. Como os dois valores obtidos como candidatos a *minimax* são iguais, ambos podem ser considerados *minimax* do jogo.

Vejamos agora o valor *maxmin* do jogo de prevenção de ataque. Como sempre, começamos selecionando os menores valores em cada linha, conforme indicado por um asterisco na Figura 5.4 (b):

	Vermelho	
Azul	**Porto Sul**	**Porto Norte**
Porto Sul	[1]	−1*
Porto Norte	−1*	[1]

Figura 5.4 (b) O Jogo de Prevenção de Ataque – Calculando o Maxmin

O leitor já deve ter percebido que, nesse jogo, como pode ser visto na Figura 5.4 (b), não há nenhuma combinação de estratégias para a qual um valor *minimax* seja igual a um valor *maxmin*. Em termos um pouco mais técnicos, diz-se que em um jogo como o da Figura 5.4 não há ponto de sela.

Isso significa que não há um equilíbrio em estratégias *puras*. Como veremos mais adiante, diz-se que os jogadores jogam estratégias puras quando adotam uma estratégia com certeza. Assim, se Azul escolher o Porto Sul com certeza, o melhor que Vermelho pode fazer é atacar o Porto Norte. Todavia, se Azul tem certeza que Vermelho vai atacar o Porto Norte, o melhor para Azul não é proteger o Porto Sul, mas sim para o Porto Norte, e assim por diante. Logo, não pode haver equilíbrio.

O leitor deve estar refletindo, contudo, que não é isso que usualmente acontece. Nenhum dos dois países sabe qual porto será escolhido pelo outro. Aliás, a possibilidade de variar, de forma imprevisível, de modo a surpreender o ad-

versário, é a essência da boa estratégia não apenas em vários esportes, mas em muitas ocasiões da própria guerra, como atesta a citação de Sun Tzu no início deste capítulo.

Quando um jogador varia a escolha de suas estratégias de forma a tentar surpreender o outro jogador, diz-se que eles adotam estratégias *mistas*. De que forma as estratégias mistas afetam a análise do equilíbrio em um jogo será nosso próximo assunto.

ESTRATÉGIAS MISTAS EM JOGOS ESTRITAMENTE COMPETITIVOS

Todos sabem que, em qualquer esporte, as chances de vitória são determinadas não apenas pela habilidade dos competidores, mas também pela sua capacidade de surpreender o adversário. Nos esportes, na economia e principalmente na guerra, o fator surpresa pode desequilibrar a situação favoravelmente a que tem a surpresa a seu lado.

Para usar uma ilustração trivial, um batedor de pênaltis, por melhor que seja, corre o risco de ter seus chutes defendidos se o goleiro adversário souber com certeza qual será o lado que o batedor escolherá para a cobrança. Todo jogador que cobra pênaltis sabe que tem de "variar" a direção do chute, para tentar *surpreender* o goleiro.

Por outro lado, sabendo que o batedor de pênaltis irá variar o lado no qual chutará a bola, o goleiro também deverá variar o lado para o qual irá se atirar ao tentar defender o gol, visando a *neutralizar* qualquer vantagem que o batedor possa ter ao escolher aleatoriamente o lado em que irá chutar a bola. Estaremos supondo, obviamente, que o goleiro *não sabe* qual será o lado que o batedor escolherá para cobrar o pênalti.

Estratégias mistas, assim, estão diretamente associadas a *tentar surpreender e evitar ser surpreendido*. Quando os jogadores partem do princípio de que os demais jogadores podem surpreendê-los, intencionalmente ou não, é razoável supor que eles podem escolher tomar suas decisões tentando evitar o pior resultado que podem obter.

É como se, diante da ameaça de uma surpresa desagradável, os jogadores adotassem uma atitude do gênero "dos males o menor". Essa é a interpretação mais usual de estratégias mistas, e a que iremos abordar agora: uma opção estratégica que visa a *neutralizar os efeitos da estratégia escolhida pelo outro jogador*.

De acordo com essa interpretação, podemos oferecer uma definição simples do que são estratégias mistas, em comparação com estratégias puras:

Quando, em vez de escolher entre suas estratégias uma dada estratégia para jogá-la com certeza, um jogador decide alternar entre suas estratégias aleatoriamente, atribuindo uma probabilidade a cada estratégia a ser escolhida, diz-se que o jogador utiliza **estratégias mistas**. Caso contrário, diz-se que emprega **estratégias puras.**

Voltando ao exemplo do jogador de futebol ao bater um pênalti, ele pode, por exemplo, jogar uma moeda não-viciada para cima, antes de decidir para que lado chutar: escolhendo, por exemplo, chutar para o lado direito se o resultado for cara, e para o lado esquerdo se o resultado for coroa.

Com isso, antes de chutar efetivamente, haveria uma probabilidade de 50% de o batedor escolher o lado direito e de 50% de escolher o lado esquerdo. Isso seria uma estratégia mista, diferentemente de uma situação em que houvesse certeza de que o batedor iria *necessariamente* escolher o lado direito, o que seria uma estratégia pura.

Um outro exemplo de estratégia mista, ainda do ponto de vista dessa interpretação, seria o caso em que o batedor, antes de escolher o lado, retirasse uma carta de um baralho aleatoriamente. Se a carta fosse do naipe de ouros, ele escolheria o lado direito para cobrar o pênalti. Se a carta fosse de qualquer outro naipe, ele cobraria o pênalti do lado esquerdo. Isso equivaleria a adotar uma estratégia mista em que o lado direito seria escolhido com 25% de probabilidade e o lado esquerdo com 75% de probabilidade.

Assim, vamos retornar ao jogo de prevenção de ataque da Figura 5.5, reproduzida novamente a seguir:

	Vermelho	
Azul	**Porto Sul**	**Porto Norte**
Porto Sul	1, −1	−1, 1
Porto Norte	−1, 1	1, −1

Figura 5.5 O Jogo de Prevenção de Ataque

O leitor já deve ter notado que, diferentemente do que fazíamos antes, quando analisávamos jogos estritamente competitivos apenas com estratégias puras, dessa vez estamos escrevendo as recompensas dos dois jogadores. Fazemos isso apenas para facilitar a compreensão do funcionamento do equilíbrio em estratégias mistas, evitando qualquer confusão que possa prejudicar o entendimento.

Vamos agora calcular quanto cada país obtém de recompensa, dada a estratégia que escolheu, se o outro país resolver variar aleatoriamente a estratégia

escolhida. Vamos iniciar calculando as recompensas de Vermelho de acordo com o porto que ele escolha atacar, se Azul decidir adotar uma estratégia mista.

A forma usual de representar uma estratégia mista é atribuir uma probabilidade para cada estratégia que cada jogador pode adotar. Por exemplo, se Azul decidisse que porto defender jogando uma moeda não viciada para cima, saberíamos que ele escolheria o porto Sul com 50% de chances (probabilidade de 0,5) e o porto Norte também com 50% de chances.

Como há somente dois portos para Azul defender, qualquer que seja o mecanismo aleatório que ele escolha para decidir que porto defender (lançamento de moeda, lançamento de dados, sorteio de uma carta ao acaso, etc.), sempre haverá uma probabilidade p de Azul escolher esse mesmo porto e uma probabilidade $1 - p$ de Azul escolher outro porto.

É fácil entender a razão disso: como há somente dois portos para Azul defender, se considerarmos as probabilidades de Azul defender cada um dos portos estaremos considerando tudo que Azul pode fazer, ou 100% de tudo que ele pode fazer. A probabilidade de tudo que é possível acontecer é, portanto, igual a 1 por definição: $p + (1 - p) = 1$.

Vamos estabelecer como convenção no nosso jogo de prevenção de ataque que a probabilidade de Azul escolher o porto Sul é representada por p, e a probabilidade de Azul escolher o porto Norte é representada por $1 - p$. Assim, o valor de p varia entre 0 e 1, sendo que um valor de p mais próximo de 1 significa uma maior probabilidade de Azul escolher o porto Sul e um valor de p mais próximo de zero significa uma maior probabilidade de Azul escolher o porto Norte.

Vejamos inicialmente os valores extremos que p pode assumir. Quando $p = 1$, a probabilidade de Azul escolher o porto Sul é de 100% ou, alternativamente, a probabilidade de Azul escolher o porto Norte é $1 - p = 1 - 1 = 0$. Ambos os resultados significam que Azul escolhe o porto Sul com certeza.

Assim, quando $p = 1$, a recompensa de Vermelho por escolher o porto Sul é –1, pois ele escolheu o porto que Azul escolherá defender com certeza e assim terá seu ataque repelido, obtendo uma recompensa de –1 (Azul, obviamente, nesse caso, obtém uma recompensa de 1). Já a recompensa de Vermelho por escolher o porto Norte, que Azul não irá defender com certeza, é 1, pois Vermelho fará um ataque bem-sucedido.

O inverso ocorre para $p = 0$, ou seja, quando a probabilidade de Azul escolher o porto Sul é nula. Isso porque quando $p = 0$ temos que $1 - p = 1 - 0 = 1$, significando que Azul escolhe o porto Norte com certeza. Assim, quando $p = 0$, a recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul é 1, pois ele escolheu o porto que Azul não escolherá defender com certeza, e a recompensa por escolher o porto Norte, no qual Azul irá alocar suas defesas com certeza, é –1.

Mas o que acontecerá se Azul escolher um p entre os dois extremos em que $p = 1$ ou $p = 0$? Nesse caso, quanto maior o p, maiores as chances de Azul escolher o porto Sul, e maior a recompensa que Vermelho pode esperar por escolher o porto Norte. Nesse caso, é claro, a recompensa que Vermelho pode esperar obter por escolher o porto Norte não será tão elevada como no caso em que $p = 1$, pois nesse caso extremo há a certeza de que Azul escolherá o porto Sul e, desse modo, Vermelho pode ter certeza de ter sucesso no ataque se escolher o porto Norte, fazendo jus à recompensa de 1.

Isso porque se $p < 1$, há alguma probabilidade, ainda que pequena, de Azul escolher o porto Norte. Assim, Vermelho não pode mais assegurar uma recompensa de 1. Para ilustrar o que estamos querendo dizer, suponha que $p = 0{,}90$, ou seja, que há 90% de chance de Azul escolher o porto Sul, mas há também 10% de chance de Azul escolher o porto Norte. A *recompensa esperada* de Vermelho nesse caso, que chamaremos REV_{PN}, por escolher o porto Norte, será:

$$REV_{PN} = (0{,}9 \times 1) + (0{,}1 \times -1) = 0{,}9 - 0{,}1 = 0{,}8$$

Obviamente, se Vermelho tivesse escolhido o porto Sul, sua recompensa esperada nesse caso (REV_{PN},) seria:

$$REV_{PS} = (0{,}9 \times -1) + (0{,}1 \times 1) = -0{,}9 + 0{,}1 = -0{,}8$$

Em outras palavras, a **recompensa esperada** de um jogador pela adoção de uma dada estratégia é a recompensa que ele pode vir a obter, em média, dadas as probabilidades com que os outros jogadores escolham suas estratégias.

Desse modo, quanto mais próxima de 1 estiver a probabilidade p de que Azul escolha o porto Sul, maior a recompensa que Vermelho pode esperar obter, em média, por escolher o porto Norte, e menor a recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul.

É importante o leitor atentar para o fato de que, uma vez que p seja menor do que 1, ainda que seja muito próximo de 1, Vermelho nunca poderá ter certeza de obter a recompensa de 1, ou seja, realizar um ataque bem-sucedido. Se $p = 0{,}99$, por exemplo, ainda que a chance do Azul escolher o porto Norte seja muito pequena (1%), ela ainda existe e, portanto, pode ser que, no momento de localizar suas defesas, Azul acabe por sortear o porto Norte, não obstante a probabilidade reduzida de que ele o faça.

O que a recompensa esperada de Vermelho nos informa, portanto, é apenas que, dadas as chances de Azul escolher o porto Sul, que supomos serem de 99%, o país Vermelho estará muito mais próximo de obter sua recompensa de 1 se escolher o porto Norte, pois nesse caso sua recompensa esperada é de:

$$REV_{PN} = (0{,}99 \times 1) + (0{,}01 \times -1) = 0{,}99 - 0{,}01 = 0{,}98$$

Do que, se Vermelho escolher o porto Sul, para o qual sua recompensa esperada será de:

$$REV_{PS} = (0{,}99 \times -1) + (0{,}01 \times 1) = -0{,}99 + 0{,}01 = -0{,}98$$

Pois Vermelho estará, nessa última hipótese, muito mais próximo de obter uma recompensa de – 1.

Por outro lado, quanto menor o p, maior a chance de Azul escolher o porto Norte, e, consequentemente, maior a recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul. Para ilustrar, suponha que $p = 0{,}20$, ou seja, que há 80% de chance de Azul escolher o porto Norte, e 20% de chance de Azul escolher o porto Sul. A recompensa esperada de Vermelho por escolher o porto Sul nesse caso será:

$$REV_{PS} = (0{,}8 \times 1) + (0{,}2 \times -1) = 0{,}8 - 0{,}2 = 0{,}6$$

Representamos isso escrevendo ao lado de cada estratégia que Azul pode escolher a probabilidade de que ele escolha essa estratégia. Assim, como atribuímos uma probabilidade p de Azul escolher o porto Sul e uma probabilidade $1 - p$ de Azul escolher o porto Norte, temos na forma estratégica da Figura 5.5 (a) que:

	Vermelho	
Azul	**Porto Sul**	**Porto Norte**
Porto Sul (p)	1, –1	–1, 1
Porto Norte ($1 - p$)	–1, 1	1, –1
Recompensa Esperada de Vermelho de Cada Estratégia	$-p + (1 - p) = 1 - 2p$	$p - (1 - p) = 2p - 1$

Figura 5.5 (a) As Estratégias Mistas de Azul

Podemos ver na Figura 5.5 (a) que se Vermelho decidir escolher o porto Sul, a recompensa que ele pode esperar receber em média, ou seja, sua recompensa esperada por escolher o porto Sul, REV_{PS}, dada a estratégia mista escolhida por Azul, será de:

$$REV_{PS} = 1 - 2p$$

Evidentemente, essa recompensa será máxima quando $p = 0$, sendo nesse caso igual a 1. Isto é, quando Azul escolher proteger o porto Sul com certeza, e Vermelho escolher o porto Norte, a recompensa de Vermelho será máxima.

Pela razão inversa, essa recompensa esperada será mínima quando $p = 1$: uma vez que Vermelho tenha decidido atacar o porto Sul, sua recompensa será mínima (no caso, $REV_{PS} = -1$).[7] A variação na recompensa esperada de Vermelho, de acordo com o porto que ele escolha e a estratégia mista adotada por Azul, é resumida no Gráfico 5.1:

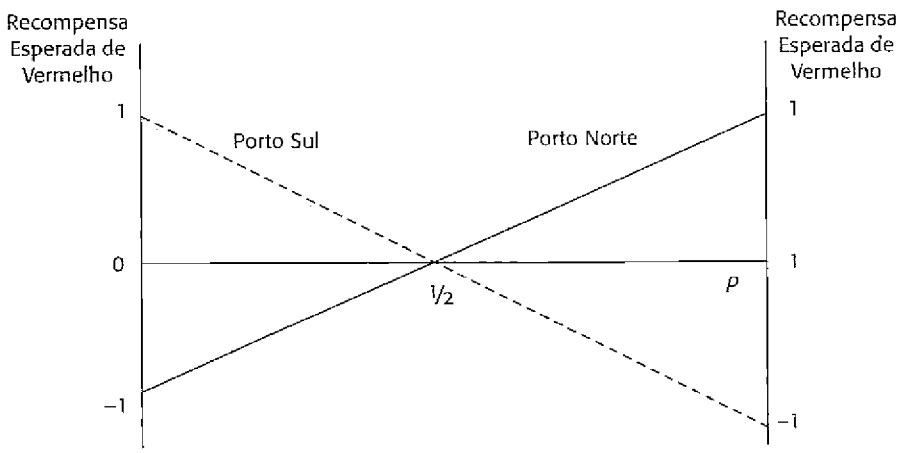


Gráfico 5.1 Recompensas Esperadas Vermelho, Dada a Estratégia Mista de Azul

Nos eixos verticais do Gráfico 5.1 temos a recompensa esperada de Vermelho, um valor que varia, conforme vimos, entre 1 e – 1, de acordo com o porto que Vermelho escolhe e a probabilidade de Azul escolher cada porto. No eixo horizontal temos o valor de p, a probabilidade de Azul escolher o porto Sul.

A linha tracejada que desce da esquerda para a direita no Gráfico 5.1 mostra como varia a recompensa esperada de Vermelho, caso ele escolha o *porto Sul*, à medida que o valor de p aumente. Essa linha começa em 1 no eixo vertical esquerdo do Gráfico 5.1, que é a recompensa que Vermelho recebe caso escolha o porto Sul na hipótese de o Azul com certeza não escolher defender o mesmo porto ($p = 0$).

Essa mesma linha atinge um mínimo em – 1 no eixo direito do gráfico, representando a menor recompensa que Vermelho pode obter ao escolher o porto Sul, que é a recompensa obtida caso Azul escolha esse porto com certeza ($p = 1$).

---

7 O leitor é convidado a desenvolver um raciocínio análogo ao que fizemos caso Vermelho se decidisse pelo porto Sul, para o caso de Vermelho decidir escolher o porto Norte.

A linha contínua que desce da direita para a esquerda no Gráfico 5.1 mostra como varia a recompensa esperada de Vermelho, caso ele escolha o *porto Norte*, à medida que o valor de p aumente. Essa linha tem seu máximo em 1 no eixo vertical direito do Gráfico 5.1, que é a recompensa que Vermelho recebe caso escolha o porto Norte na hipótese de Azul, com certeza, não escolher o mesmo porto, escolhendo o porto Sul ($p = 1$).

Por outro lado, a reta que representa a recompensa esperada de Vermelho, caso ele escolha o porto Norte, no Gráfico 5.1 atinge um mínimo em – 1 no eixo esquerdo do gráfico, representando a menor recompensa que Vermelho pode ter ao escolher o porto Norte, que é a recompensa obtida caso Azul escolha esse porto com certeza ($p = 0$).

No Gráfico 5.1 temos então uma primeira aproximação às melhores respostas de Vermelho a cada possibilidade de estratégia mista, isto é, a cada valor de p que Azul pode adotar. Se $p < ½$, escolher o porto Sul sempre rende a Vermelho uma recompensa esperada maior do que escolher o porto Norte, como se pode inferir do fato de que a linha pontilhada (representando a recompensa esperada de Vermelho ao escolher o porto Sul) se encontra acima da linha contínua (representando a recompensa esperada de Vermelho ao escolher o porto Norte) no Gráfico 5.1.

Por outro lado, se $p > ½$, escolher o porto Norte sempre rende a Vermelho uma recompensa esperada maior do que escolher o porto Sul, como também se pode inferir do fato de que a linha contínua se encontra acima da linha pontilhada no Gráfico 5.1. No caso em que $p = ½$, é indiferente exatamente para Vermelho escolher o porto Sul ou o porto Norte. Qualquer escolha de um dos portos dará a Vermelho a mesma recompensa esperada.

Podemos então afirmar que, para valores de p menores do ½, Vermelho deve escolher o porto Sul com certeza, pois isso maximizará o valor de sua recompensa esperada, dada a maior probabilidade de que Azul escolha o porto Norte. Para valores de p maiores do que ½, Vermelho deve escolher o porto Norte com certeza, pois isso maximizará sua recompensa esperada, dada a maior probabilidade de que Azul escolha o porto Sul.

Por analogia com o que fizemos no caso de Azul adotar uma estratégia mista, vamos agora chamar de q a probabilidade de que Vermelho escolha o porto Sul e de $1 - q$ a probabilidade de que Vermelho escolha o porto Norte.

Outra forma de escrever a conclusão obtida anteriormente de que para valores de p menores do que ½ Vermelho deve escolher o porto Sul com certeza e para valores de p maiores do que ½ Vermelho deve escolher o porto Norte com certeza é afirmar, de forma mais sintética, que a melhor resposta para Vermelho para $p < ½$ é Vermelho fazer $q = 1$, e a melhor resposta para $p > ½$ é fazer $q = 0$.

Isso nos permitirá descrever as melhores respostas de Vermelho às várias estratégias mistas que Azul pode vir a adotar simplesmente como uma combinação entre p e q. Graficamente, podemos descrever a melhor resposta de Vermelho (um valor de q que pode estar entre 0 e 1, incluindo esses dois extremos) em função da estratégia mista adotada por Azul (o valor de p), no Gráfico 5.2:

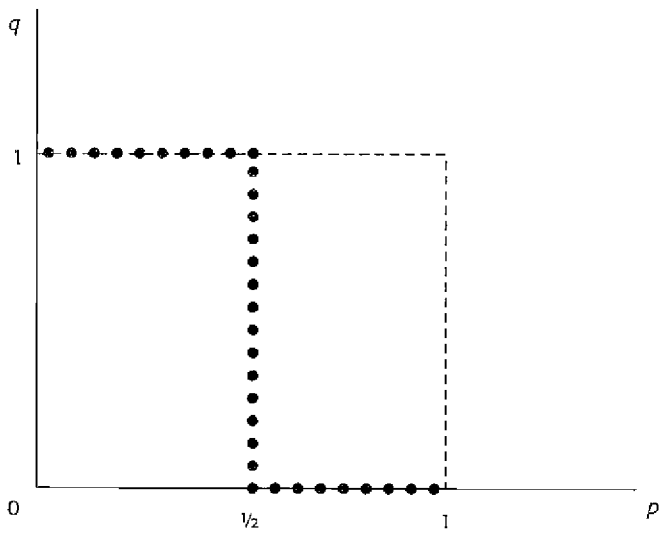


Gráfico 5.2 As Melhores Respostas de Vermelho

No Gráfico 5.2 vemos o valor de q que representa a melhor resposta de Vermelho para cada p que Azul pode adotar assinalado pela linha pontilhada em forma de "S" invertido. O Gráfico 5.2 nos informa que para valores de $p < ½$, a melhor resposta de Vermelho é fazer $q = 1$, que é o ramo de sua função de melhor resposta que é paralelo ao eixo p na altura em que $q = 1$.

Para valores de $p > ½$, a melhor resposta de Vermelho é fazer $q = 0$, daí a sua função de melhor resposta coincidir com o eixo p do valor de $p = ½$ até o valor de $p = 1$, significando que nesse intervalo $q = 0$. Por último, quando $p = ½$, *não importa o porto que Vermelho escolha*: assim, sua função de melhor resposta é vertical, indicando que qualquer valor de q é igualmente uma boa resposta ao fato de que Azul fez $p = ½$.

Esse resultado de que qualquer valor de q é igualmente uma boa resposta ao fato de que Azul fez $p = ½$ pode parecer um pouco estranho ao leitor, mas é um resultado importante e por isso merece ser mais bem compreendido. Para tanto, considere a expressão abaixo, que nos fornece a recompensa esperada de Vermelho (*REV*) para *qualquer estratégia mista que Vermelho e Azul adotem*:

$$REV = pq\,(-1) + p(1-q)\,(1) + (1-p)(q)(1) + (1-p)(1-q)(-1)$$

Apesar de extensa, a expressão acima não deve assustar o leitor. O que fizemos foi apenas somar as recompensas de Vermelho para cada combinação de estratégias, dadas as probabilidades de as estratégias serem adotadas pelos dois jogadores.

Considere o primeiro termo na expressão acima: $pq(-1)$. O que ele significa? Significa a recompensa de Vermelho, no caso em que tanto Vermelho como Azul escolham o porto Sul, vezes e probabilidade de Azul escolher o porto Sul e a probabilidade de Vermelho também escolher o porto Sul.

O termo $pq(-1)$, portanto, é a recompensa esperada de Vermelho, caso essa combinação particular de estratégias, em que os dois jogadores escolhem o porto Sul, se verifique, dadas as probabilidades de que isto ocorra. O mesmo vale para os demais termos da expressão (o leitor deve se certificar disto). Assim, a expressão anterior é a recompensa esperada total de Vermelho no jogo de prevenção de ataque, dadas todas as combinações de estratégias possíveis e suas probabilidades.

Simplificando a expressão anterior obtemos:

$$REV = 2q - 4pq + 2p - 1$$

Vamos colocar q em evidência, pois é a única variável que Vermelho controla: é a variável que nos informa se Vermelho vai atacar com certeza o porto Sul ($q = 1$), se vai escolher o porto Norte com certeza ($q = 0$), ou se vai adotar alguma estratégia mista ($0 < q < 1$). Assim obtemos:

$$REV = q(2 - 4p) + 2p - 1$$

O que acontece então se Azul decide fazer $p = ½$, ou seja, se adota uma estratégia mista em que há 50% de chance de ele escolher o porto Sul e 50% de chance de ele escolher o porto Norte?

Agora deve estar claro o que significa dizer que quando Azul adota a estratégia mista em que $p = ½$, para Vermelho é indiferente atacar o porto Sul com certeza, atacar o porto Norte com certeza ou adotar qualquer estratégia mista, em que Vermelho escolha atacar o porto Sul com uma probabilidade q e o porto Norte com uma probabilidade $(1 - q)$: quando $p = ½$, então o termo entre parênteses na expressão $REV = q(2 - 4p) + 2p - 1$ se torna $q(2 - 2) = 0$.

Com isso, q passa a ser multiplicado por zero, e se torna irrelevante para a determinação da recompensa esperada por Vermelho: se Vermelho escolhe o

porto Sul com certeza ($q = 1$), o porto Norte com certeza ($q = 0$), ou se adota alguma estratégia mista ($0 < q < 1$), sua recompensa esperada não é afetada e é sempre:

$$REV = 2p - 1 = 2(1/2) - 1 = 0$$

Em outras palavras, uma vez que Azul tenha escolhido uma estratégia mista em que o porto a ser protegido é sorteado com 50% de chances para cada um, a recompensa esperada de Vermelho ao decidir atacar um porto ou outro, ou também sortear entre eles com qualquer probabilidade para cada um, inclusive 50% de chances para cada porto, é sempre em média zero.

Aqui há um ponto muito importante, que irá se repetir no caso de Azul (que iremos discutir daqui a pouco), mas que já é importante assinalar. O fato de que se tornou indiferente para Vermelho escolher um ou outro porto com certeza ou ainda adotar uma estratégia mista em que cada porto seja escolhido aleatoriamente com uma dada probabilidade, significa que *não há nada que Vermelho possa fazer para surpreender Azul.*

Ou seja, Vermelho não obtém qualquer vantagem se alterar as chances de atacar um dos portos: a estratégia mista de Azul de localizar sua frota aérea de defesa de forma aleatória, com 50% de chances em cada porto, anula completamente qualquer possibilidade de Vermelho surpreender Azul com sua escolha.

Em outros termos, ao adotar $p = ½$, *Azul neutralizou qualquer vantagem que Vermelho pudesse ter, variando o lado que iria atacar.* Esse é o sentido de tornar q irrelevante fazendo $p = ½$. Esse é o aspecto fundamental de estratégias mistas, e o leitor deve mantê-lo em mente, pois será de grande importância para entendermos o sentido do equilíbrio em estratégias mistas.

Caso Azul realmente decida implementar essa estratégia mista, em que $p = ½$, representamos esse fato da seguinte forma:

$$(p, 1 - p) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Onde, por convenção, o primeiro elemento do par ordenado que representa a estratégia mista é a probabilidade de a estratégia na primeira linha ser jogada, o segundo elemento é a probabilidade de a estratégia na segunda linha ser jogada e assim por diante, caso o jogador possua mais de duas estratégias.

A forma estratégica da Figura 5.5 (b) descreve tanto as probabilidades de Azul ao escolher o porto em que irá localizar sua frota de defesa aérea como as probabilidades de Vermelho ao escolher o porto que irá atacar:

	Vermelho		
Azul	**Porto Sul (q)**	**Porto Norte ($1 - q$)**	**Recompensa Esperada de Azul**
Porto Sul (p)	1, −1	−1, 1	$1(q) + (-1)(1 - q) = 2q - 1$
Porto Norte ($1 - p$)	−1, 1	1, −1	$-1(q) + (1)(1 - q) = 1 - 2q$
Recompensa Esperada de Vermelho	$(-1)p + (1)(1 - p) = 1 - 2p$	$(1)p + (-1)(1 - p) = 2p - 1$	

Figura 5.5 (b) As Estratégias Mistas de Azul e Vermelho

Podemos observar na Figura 5.5 (b) que se Azul escolher o porto Sul, sua **recompensa esperada** REA_{PS}, dada a estratégia mista escolhida por Vermelho, será de:

$$REA_{PS} = 2q - 1$$

Evidentemente, essa recompensa será máxima quando $q = 1$, sendo nesse caso igual a 1. Isto é, quando Vermelho com certeza escolher o porto Sul , o mesmo porto que Azul decidiu escolher, a recompensa esperada de Azul será máxima.

Pela razão inversa, essa recompensa esperada será mínima quando $q = 0$. Uma vez que Vermelho com certeza escolha atacar o porto Norte, enquanto Azul escolhe defender o porto Sul, a recompensa de Azul será mínima (no caso, $REA_{PS} = -1$ se $q = 0$). O leitor é, também nesse caso, convidado a desenvolver um raciocínio análogo para o caso de Azul escolher o porto Norte.

Essa variação na recompensa esperada de Azul, de acordo com o porto que Azul escolha e a estratégia mista que Vermelho adote, é resumida no Gráfico 5.3:

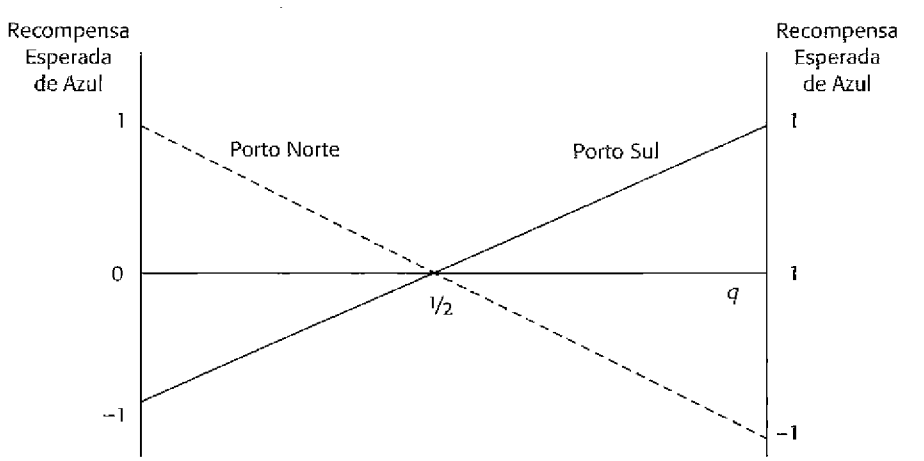


Gráfico 5.3 Recompensas Esperadas de Azul, Dada a Estratégia Mista de Vermelho

Nos eixos verticais do Gráfico 5.3 temos a recompensa esperada de Azul, também um valor que varia entre 1 e – 1, de acordo com o porto que Vermelho escolhe e a probabilidade da sua escolha. No eixo horizontal, temos o valor de q, a probabilidade de Vermelho escolher atacar o porto Sul.

A linha contínua que sobe da esquerda para a direita no Gráfico 5.3 mostra como varia a recompensa esperada de Azul, caso ele escolha o porto Sul, à medida que o valor de q aumente. Essa linha começa em seu valor mínimo (recompensa de –1: o porto Norte é atacado com certeza) no eixo vertical esquerdo do Gráfico 5.3, que é a recompensa que Azul recebe caso escolha proteger o porto Sul, no caso em que Vermelho com certeza não escolhe o mesmo porto ($q = 0$).

Essa mesma linha atinge um máximo de 1 no eixo direito do gráfico, representando a maior recompensa que Azul pode ter ao escolher o porto Sul, que é a recompensa obtida caso Vermelho escolha esse mesmo porto com certeza ($q = 1$).

A linha tracejada que desce da esquerda para a direita no Gráfico 5.3 mostra como varia a recompensa esperada de Azul, caso escolha o porto Norte, à medida que o valor de q aumenta. O mínimo dessa linha em – 1 no eixo vertical direito do Gráfico 5.3 é a recompensa que Azul recebe se escolher o porto Norte no caso em que Vermelho, com certeza, escolhe o porto Sul ($q = 1$).

Já a mesma reta que representa a recompensa esperada de Azul caso ele escolha o porto Norte atinge o máximo em 1 no eixo esquerdo do Gráfico 5.3, representando a maior recompensa que Azul pode ter ao escolher o porto Norte: a recompensa obtida no caso em que Vermelho escolhe este porto com certeza ($q = 0$).

No Gráfico 5.3 temos também uma primeira abordagem das melhores respostas de Azul a cada possibilidade de estratégia mista de Vermelho, isto é, a cada valor de q que Vermelho pode adotar. Assim, se $q > ½$, escolher o porto Sul sempre rende a Azul uma recompensa esperada maior do que escolher o porto Norte, como se pode inferir do fato de que a linha contínua (representando a recompensa esperada de Azul ao escolher o porto Sul) se encontra acima da linha tracejada (representando a recompensa esperada de Azul ao escolher o porto Norte) no Gráfico 5.3.

Por outro lado, se $q < ½$, escolher o porto Norte sempre rende a Azul uma recompensa esperada maior do que escolher o porto Sul, como também se pode inferir do fato de que a linha tracejada se encontra acima da linha contínua no Gráfico 5.3. No caso em que $q = ½$, é indiferente para Azul escolher entre o porto Sul e o porto Norte. Qualquer escolha dará a Azul a mesma recompensa esperada, como mostra o fato que as duas linhas se cruzam quando $q = ½$.

Podemos então afirmar que, para valores de q menores do que ½, Azul deve escolher o porto Norte com certeza, o que maximizará o valor de sua recompensa esperada, dada a maior probabilidade de Vermelho escolher o mesmo

porto para atacar. Para valores de q maiores do que ½, Azul deve escolher o porto Sul com certeza, pois isso irá maximizar sua recompensa esperada, dada a maior chance de que Vermelho escolha esse mesmo porto.

Estamos agora em condições de analisar as melhores respostas de Azul às várias estratégias mistas de Vermelho, novamente apenas como uma combinação entre p e q. Podemos assim descrever graficamente a melhor resposta de Azul, dada a estratégia mista adotada por Vermelho (o valor de q) no Gráfico 5.4:

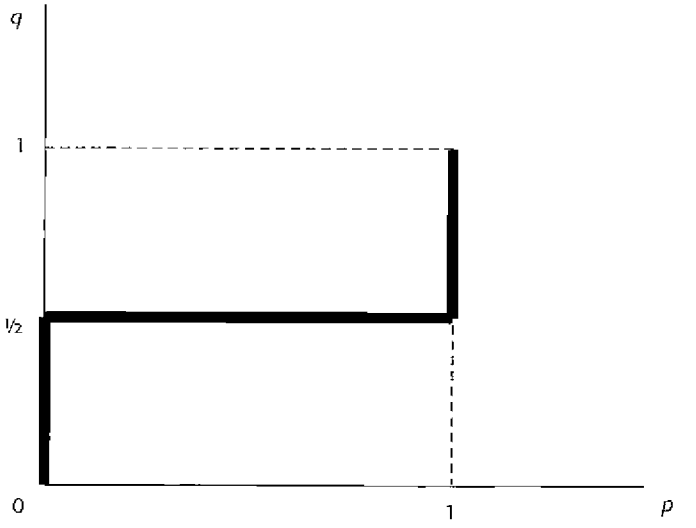


Gráfico 5.4 As Melhores Respostas de Azul

No Gráfico 5.4 temos o valor de p, que representa a melhor resposta de Azul para cada q que Vermelho pode adotar, assinalado pela linha cheia em forma de degrau de escada, que parte do valor em que $q = 0$, sobe verticalmente até o valor em que $q = ½$, e segue horizontalmente a partir daí até o valor em que $p = 1$, de onde sobe verticalmente, paralela ao eixo de q.

Esse gráfico demonstra que, para valores de $q < ½$, a melhor resposta de Azul é fazer $p = 0$, daí a função de melhor resposta de Azul coincidir com o eixo vertical. Para $q > ½$, a melhor resposta de Azul é fazer $p = 1$, quando a função sobe verticalmente. Se o valor de $q = ½$, é indiferente para Azul escolher um ou outro porto: a função de melhor resposta é horizontal, indicando que qualquer valor de p, com $0 \leq p \leq 1$, é uma boa resposta a $q = ½$.

Vamos analisar a situação em que $q = ½$ da mesma forma que fizemos no caso de Vermelho. Para tanto, considere a expressão seguinte, que representa a recompensa esperada de Azul (*REA*) para qualquer estratégia mista que tanto Azul como Vermelho adotem:

$$REA = pq(1) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)(1)$$

De maneira análoga, como no caso da expressão para a recompensa esperada de Vermelho, tudo o que fizemos foi somar o produto das recompensas de Azul para cada combinação de estratégias, multiplicadas pelas probabilidades de que cada jogador adotasse cada uma das estratégias que compõem a combinação.

Simplificando a expressão obtemos:

$$REA = 4pq - 2p - 2q + 1$$

Vamos colocar p em evidência, pois, também de maneira análoga, p é a única variável que Azul controla: é a variável que nos informa se Azul vai escolher com certeza proteger o porto Sul ($p = 1$), se vai escolher proteger o porto Norte com certeza ($p = 0$), ou se vai adotar alguma estratégia mista ($0 < p < 1$). Assim, obtemos:

$$REA = p(4q - 2) - 2q + 1$$

Basta Vermelho adotar a estratégia mista em que $q = ½$ que será indiferente para Azul proteger o porto Sul com certeza, proteger o porto Norte com certeza, ou ainda adotar qualquer estratégia mista: quando $q = ½$ o termo entre parênteses na expressão se torna $[4(1/2) - 2] = (2 - 2) = 0$.

Com isso, p passa a ser multiplicado por zero, e também nesse caso se torna irrelevante para a determinação da recompensa esperada do batedor, pois sua recompensa esperada não é afetada por p e é sempre:

$$REA = -2q + 1 = -2(1/2) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Chegamos então a um resultado análogo, no caso de Azul, ao que obtivemos na análise do comportamento da recompensa esperada de Vermelho. Assim como no caso de Vermelho, torna-se indiferente para Azul escolher proteger com certeza o porto Sul, escolher com certeza proteger o porto Norte, ou adotar uma estratégia mista, se Vermelho fizer $q = ½$.

O fato de que se tornou indiferente para Azul escolher um dos portos com certeza ou adotar uma estratégia mista significa também nesse caso que *não há nada que Azul possa fazer para surpreender Vermelho*. Em outros termos, no caso em que $q = ½$, *Vermelho neutraliza qualquer vantagem que Azul possa ter, variando aleatoriamente o porto em que irá atacar.*

Caso Vermelho decida implementar essa estratégia mista, em que $q = ½$, representamos esse fato da seguinte forma:

$$(q, 1-q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Onde, por convenção, o primeiro elemento do par ordenado que representa a estratégia mista é a probabilidade de a estratégia na primeira coluna ser jogada, o segundo elemento é a probabilidade de a estratégia na segunda coluna ser jogada, e assim por diante, caso o jogador possua mais de duas estratégias.

Desse modo, se ambos os jogadores adotarem estratégias mistas em que $p = q = ½$, temos um **equilíbrio em estratégias mistas**, no sentido que nenhum dos jogadores consegue melhorar suas recompensas esperadas alterando a probabilidade de escolha de uma das duas estratégias, ou mesmo adotando uma estratégia pura qualquer: nenhum deles consegue surpreender o outro, o que quer que seja que faça. Representamos esse equilíbrio da seguinte forma:

$$((p, 1-p), (q, 1-q)) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Significando assim que, em equilíbrio, há 50% de chances de Azul adotar p e 50% de chances de adotar $1 - p$; e há 50% de chances de Vermelho adotar q e 50% de chances de adotar $1 - q$. Graficamente, podemos encontrar esse equilíbrio simplesmente superpondo as duas funções de melhor resposta dos dois jogadores, tal como se encontram nos gráficos 5.2 e 5.4. Foi o que fizemos no Gráfico 5.5:

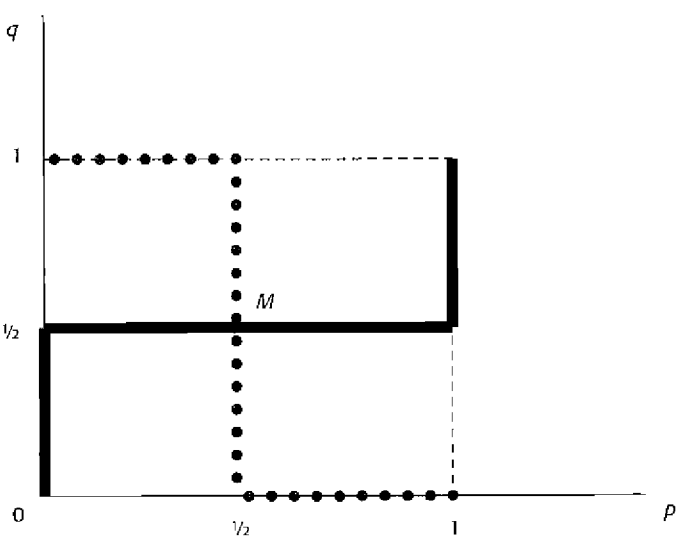


Gráfico 5.5 O Equilíbrio em Estratégias Mistas

No Gráfico 5.5, a linha tracejada é a função de melhor resposta de Vermelho, enquanto a linha cheia é a função de melhor resposta de Azul. Há apenas

um ponto no qual as duas funções se cruzam: o ponto M, em que $p = q = ½$, que é o equilíbrio em estratégias mistas desse jogo. Na verdade, como fica evidente do exame do Gráfico 5.5, esse é o único ponto de equilíbrio do jogo: o jogo de prevenção de ataque é um jogo que tem apenas um equilíbrio, e em estratégias mistas.

Desse modo, o jogo de prevenção de ataque tem um único equilíbrio, que consiste em cada lado escolher o porto que é defendido ou atacado com probabilidades iguais, de forma que o inimigo não consiga antecipar qual o porto escolhido para a defesa ou o ataque. Ao se comportarem assim, os dois lados na guerra estarão obedecendo à máxima de Sun Tzu do início deste capítulo: contra os que sabem atacar, o inimigo ignora que local defender; contra os que sabem defender, o inimigo ignora que local atacar.

Na verdade, um jogo pode possuir equilíbrios em estratégias puras, equilíbrios em estratégias mistas e equilíbrios em estratégias mistas e puras. Veremos que o jogo da guerra fria é um jogo que possui equilíbrio em estratégias mistas e puras. Qual seria o tipo de jogo com equilíbrio apenas em estratégias puras? Nos exercícios deste capítulo o leitor poderá verificar por si mesmo que jogos que têm equilíbrio em estratégias estritamente dominantes não têm equilíbrio em estratégias mistas.

Entretanto, a perspectiva pessimista (na medida em que busca a minimização de surpresas desagradáveis) que norteia a escolha de estratégias mistas não se limita a jogos estritamente competitivos. Também podemos aplicar estratégias mistas, com o mesmo propósito, em jogos que não são estritamente competitivos. Esse será nosso próximo tema.

Uma Aplicação de Estratégias Mistas a Jogos Não Estritamente Competitivos

Na verdade, a interpretação de estratégias mistas como uma opção estratégica pessimista, de forma a minimizar perdas, ultrapassa as situações de interação estratégica que podem ser descritas como jogos estritamente competitivos. Na verdade, em jogos que não são estritamente competitivos, os jogadores também podem ter a opção de variar aleatoriamente suas estratégias, de modo a reduzir eventuais perdas por serem pegos desprevenidos.

Assim, para entender melhor o papel das estratégias mistas, quando os jogadores escolherem jogar "dos males o menor", considere mais uma vez o jogo da guerra fria, da Figura 5.2, aqui reproduzido novamente como a Figura 5.6:

	União Soviética	
Estados Unidos	**Ameaça (q)**	**Não Ameaça (1-q)**
Ameaça (p)	−100, −100	10, −10
Não Ameaça (1-p)	−10, 10	0, 0

Figura 5.6 O Jogo da Guerra Fria

O leitor deve se recordar do tipo de situação de interação estratégica que foi descrito no jogo da guerra fria na Figura 5.6. Como tivemos oportunidade de ver, esse jogo possui dois equilíbrios de Nash: (Ameaça, Não Ameaça) e (Não Ameaça, Ameaça).

O problema é que há o risco de, na falta de um mecanismo de coordenação que possibilite aos países coordenarem suas decisões, ambos escolham ameaçar, e com isso ambos obtenham a pior recompensa (-100). Como reduzir as chances de que as duas superpotências escolham simultaneamente um resultado que seja o pior para ambas? Aqui, novamente, as estratégias mistas podem ajudar a minimizar as perdas *esperadas*.

Para visualizar melhor o que queremos dizer, considere novamente a Figura 5.6. Nela indicamos que os Estados Unidos ameaçam usar seu arsenal nuclear com probabilidade p, e não ameaçam usar o arsenal com probabilidade $(1 - p)$. Da mesma forma, a União Soviética ameaça empregar armas nucleares com probabilidade q, e não ameaça mobilizar seu arsenal nuclear com probabilidade $(1 - q)$.

As recompensas esperadas dos Estados Unidos (que chamaremos de *REE*) e da União Soviética (que chamaremos de *REU*) serão dadas, então, respectivamente, por:

$$REE = (p)(q)(-100) + (1 - p)(q)(-10) + (p)(1 - q)(10) + (1 - p)(1 - q)(0)$$
$$REU = (q)(p)(-100) + (1 - q)(p)(-10) + (q)(1 - p)(10) + (1 - q)(1 - p)(0)$$

A questão que agora se coloca é que estratégias, e com que probabilidade cada uma, cada jogador deve escolher, de forma a minimizar suas perdas. Se conseguirmos encontrar as probabilidades de uma estratégia mista para cada jogador *que ao menos façam com que seja indiferente para os jogadores essas estratégias mistas ou quaisquer outras (mistas ou puras)*, teremos encontrado o equilíbrio de Nash em estratégias mistas nesse jogo que, conforme vimos, não é estritamente competitivo.

Assim como no jogo da prevenção de ataque, o papel das estratégias que irão compor o equilíbrio de Nash em estratégias mistas será minimizar a chance de cada jogador ter uma surpresa desagradável, ao descobrir, por exemplo, que o outro país também decidiu ameaçar.

Para encontrar essas probabilidades, considere inicialmente a expressão de *REE* acima. Simplificando, ela se reduz a:

$$REE = -100pq - 10q + 10p$$

Colocando p em evidência, temos que:

$$REE = p(10 - 100q) - 10q$$

Portanto, para que os Estados Unidos sejam indiferentes em relação a ameaçar (ou não) a União Soviética, isto é, quanto ao valor de p que decidam adotar, a União Soviética deve adotar uma estratégia mista em que a probabilidade de que ameace empregar seu arsenal nuclear seja de:

$$10 - 100q = 0 \therefore q = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

Se a União Soviética adotar esta estratégia mista representada por $\left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)$, com 10% de chances de ameaçar empregar seu arsenal, não há nada que os Estados Unidos possam fazer para alterar a recompensa que podem obter, *em média*, e que será igual a $-10q = -1$.

Agora temos de fazer o mesmo para a União Soviética. Adotamos então o procedimento inverso – inicialmente simplificamos a expressão para *REU*, encontrando assim:

$$REU = q(10 - 100p) - 10p$$

O próximo passo é identificar o valor de p que torna a probabilidade de a União Soviética jogar uma ou outra estratégia, q ou $(1 - q)$, irrelevante. É fácil deduzir que esse valor também é de 1/10. Segue-se que a estratégia mista para os Estados Unidos também deverá ser:

$$(p, 1 - p) = \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

Logo, o equilíbrio de Nash em estratégias mistas será dado por tanto os Estados Unidos como a União Soviética escolhendo entre ameaçar ou não o rival com 10% de chances de ameaçar. Nesse caso, a recompensa esperada para os Estados Unidos também será de $-10p = -1$

Esse é um jogo, portanto, que possui três equilíbrios. Dois deles são equilíbrios em estratégias puras, em que um dos jogadores não ameaça com seus arsenais nucleares, enquanto o outro o faz. O outro equilíbrio é em estratégias mistas, em que cada jogador ameaça com 10% de chances. O Gráfico 5.6 retrata esses equilíbrios:

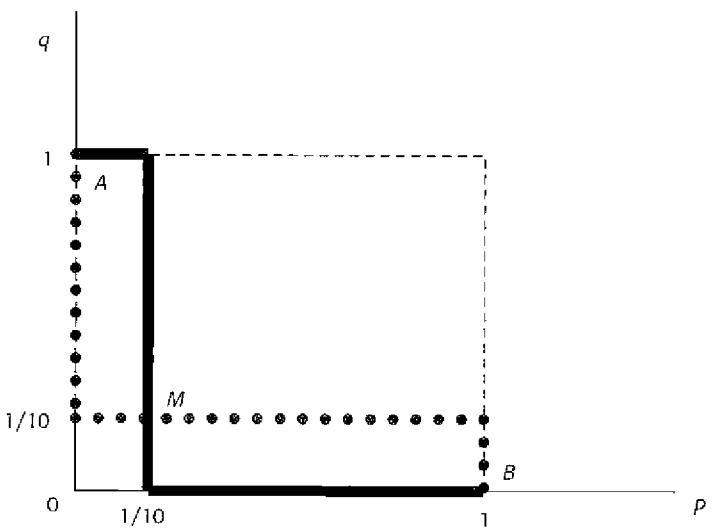


Gráfico 5.6 Os Equilíbrios em Estratégias Puras e Mistas

No Gráfico 5.6, a linha pontilhada representa a função de melhor resposta dos Estados Unidos para cada escolha de q da União Soviética, e a linha contínua representa a função de melhor resposta da União Soviética para cada escolha de p dos Estados Unidos.

É fácil observar no Gráfico 5.6 que há três equilíbrios possíveis: o equilíbrio no ponto A, em que a União Soviética ameaça usar seu arsenal *com certeza* ($q = 1$) enquanto os Estados Unidos não ameaçam usar seu arsenal nuclear *com certeza* ($p = 0$); o equilíbrio no ponto B, em que a União Soviética não ameaça usar seu arsenal nuclear com *certeza* ($q = 0$) enquanto os Estados Unidos ameaçam com certeza ($p = 1$); e o equilíbrio em estratégias mistas no ponto M, em que cada país decide ameaçar com 10% de probabilidade ($p = q = 0{,}1$).

Dada a adoção de estratégias mistas, cada jogador espera uma recompensa, *em média*, de -1 como resultado da adoção desse equilíbrio de Nash em estraté-

gias mistas. Esse resultado deriva do fato de que, dada a combinação de estratégias mistas de equilíbrio, os Estados Unidos têm recompensa esperada de:

$$REE = (1/10)(1/10)(-100) + (1/10)(9/10)(10) + (9/10)(1/10)(-10) + (9/10)(9/10)(0)$$

Ou seja:

$$REE = -1 + 0{,}9 - 0{,}9 + 0 = -1$$

Assim como a União Soviética tem uma recompensa esperada de:

$$REU = (1/10)(1/10)(-100) + (9/10)\,(1/10)\,(10) + (1/10)\,(9/10)\,(-10) + (9/10)(9/10)(0)$$

Ou seja:

$$REE = -1 + 0{,}9 - 0{,}9 + 0 = -1$$

Pode não parecer muito, mas é o melhor que se pode obter, *dada a impossibilidade* de que os jogadores coordenem suas decisões para exercerem rotativamente a opção de ameaçar com o uso de seus arsenais nucleares, com cada um decidindo ameaçar usar suas armas nucleares em vezes alternadas, cada vez que uma situação de confronto se apresente.

Também é o melhor que se pode obter, dada a impossibilidade de que as duas superpotências se comprometam a nunca ameaçar usar suas armas, pois a tentação de ganhar no confronto pela possibilidade de usar as armas nucleares é muito forte para que as duas superpotências abandonem esse recurso (afinal, qual é o valor de possuir um arsenal nuclear se você não pode usá-lo?). Mas qual é o sentido de uma recompensa esperada de –1?

O sentido da recompensa esperada de –1 é que se ambas as superpotências adotarem a estratégia mista em que ameaçam com 10% de chances, há apenas $10\% \times 10\% = 1\%$ de chances de que as duas ameacem simultaneamente e possam receber, cada uma, a recompensa de uma guerra nuclear (–100).

É o melhor que se pode obter, dado que é impossível conseguir das duas superpotências o compromisso de nunca ameaçarem com suas armas nucleares. Note, contudo, que se as duas superpotências se comprometessem a renunciar a esse tipo de ameaça, a recompensa de ambas aumentaria de –1 para 0. Portanto, a estratégia mista em questão representa um equilíbrio Pareto-ineficiente.[8]

---

8 O equilíbrio entre as superpotências nucleares durante a guerra fria ficou conhecido, com muita justeza, como o *equilíbrio do terror*.

Assim, nunca é demais enfatizar que estratégias mistas não visam a maximizar a recompensa dos jogadores, mas minimizar as perdas que eles podem ter ao enfrentarem surpresas desagradáveis dos demais jogadores.

De um ponto de vista mais formal, a virtude do equilíbrio de Nash em estratégias mistas é que se pode provar que **em todo jogo em que há um número finito de jogadores, com um número finito de estratégias, sempre há um equilíbrio de Nash, provavelmente em estratégias mistas.** Na seção de exercícios, o leitor é convidado a testar esse teorema para o jogo de combinar moedas, que não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras.[9]

O leitor talvez esteja um tanto descrente da hipótese de que os jogadores tomem suas decisões recorrendo a dados, lançamento de moeda etc. Muitos teóricos de jogos têm reservas em relação a estratégias mistas, e outras interpretações têm sido apresentadas para essa ferramenta, inclusive na área da biologia, no estudo da dinâmica evolutiva das populações.[10]

9 Note, contudo, que jogos de estratégias contínuas, como o modelo de Cournot da seção anterior, por possuírem infinitas estratégias, não permitem a aplicação desse teorema.

10 Outros autores, como Harsanyi, sugeriram que estratégias mistas poderiam ser entendidas como o resultado de incerteza sobre as recompensas dos demais jogadores. O argumento é bastante complexo para ser abordado em um livro introdutório. Seja como for, o assunto é, sem dúvida, algo controverso.

EXERCÍCIOS

5.1 Identifique se os seguintes jogos são ou não estritamente competitivos:

a. Dilema do prisioneiro
b. Batalha dos sexos
c. O jogo do comércio internacional da Figura 3.5
d. O jogo de coordenação do padrão tecnológico da Figura 3.6

5.2 Seja o jogo estritamente competitivo a seguir, em que o jogador nas linhas (Jogador 1) possui duas estratégias (α e β), e o jogador nas colunas (Jogador 2) possui tres estratégias (A, B e C).

	Jogador 2		
Jogador 1	**A**	**B**	**C**
α	4	5	4
β	3	0	1

Verifique se há algum equilíbrio nesse jogo, empregando o método minimax-maximin.

5.3 Considere o jogo de combinar moedas da Figura 3.8 e verifique se ele é solucionável pelo método minimax-maximin.

5.4 Construa uma representação em forma estratégica do jogo do par ou ímpar, em que a recompensa do jogador que ganha é 1 e a recompensa do jogador que perde é −1, e verifique se ele é um jogo estritamente competitivo e se tem solução pelo método minimax-maximin.

5.5 Considere o jogo a seguir, que tem um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes:

	Jogador 2	
Jogador 1	α	β
I	2, 1	1, 0
II	1, 2	0, 1

a. Mostre que esse jogo não tem equilíbrio em estratégias mistas.
b. Mostre graficamente as funções de melhor resposta do jogador 1 e do jogador 2.

5.6 Considere duas empresas que estão disputando parcelas de mercado. A primeira empresa a Empresa Alfa, tem a possibilidade de lançar 4 tipos diferentes de produto, que chamaremos de produtos A, B, C e D. A segunda empresa, a Empresa Beta, pode lançar também quatro tipos diferentes de produtos: X, W, Y e Z. Cada empresa só pode lançar um produto de cada vez. A forma estratégica a seguir nos informa as parcelas de mercado ganhas pela Empresa Alfa para cada combinação de lançamento de produtos:

Empresa Alfa (%)	Empresa Beta (%)			
	X	W	Y	Z
A	10	20	15	30
B	40	30	50	55
C	35	25	20	40
D	25	15	35	60

Pede-se identificar se há algum ponto de sela nessa matriz de recompensa e, portanto, se há alguma solução pelo método minimax-maximin.

5.7 Retorne ao jogo da batalha do mar de Bismarck da Figura 5.1 e verifique se tem equilíbrio em estratégias mistas.

5.8 Em agosto de 1944, o terceiro exército norte-americano, sob o comando do general Patton, já tinha transportado sete divisões (mais ou menos 100 mil soldados) por uma passagem ao sul da Normandia, após o desembarque do dia D. Essas forças começavam a se deslocar para o sul, o leste e o noroeste da França. Contudo, a passagem poderia ser fechada caso o sétimo exército alemão alcançasse a cidade de Avranches, no sul da Normandia, isolando a península onde as tropas aliadas se encontravam instaladas das outras tropas que se moviam pela França. Esse era o dilema do marechal-de-campo alemão Günther von Kluge: avançar para tentar fechar a passagem, isolando as tropas do general Patton, que se moviam no interior da França, de suas linhas de suprimento na Normandia; ou recuar, para consolidar suas defesas?

O comandante aliado, general Omar Bradley, tinha duas opções: avançar para atacar o sétimo exército alemão em seu flanco sul ou aguardar com as forças de reserva até que os alemães se definissem pelo ataque ou pela retirada. Se os alemães recuassem e o general Bradley avançasse, ele poderia exercer uma forte pressão sobre a retirada alemã. Contudo, se o general Bradley avançasse para o sul e os alemães atacassem a passagem, a retaguarda da passagem por onde passavam os suprimentos ficaria totalmente desprotegida: assim, no caso de um ataque alemão, a passagem muito provavelmente seria fechada, deixando os aliados em uma situação muito difícil na França. Por outro lado, se o general Bradley aguardasse com as forças de reserva, teria como lançá-las na defesa da passagem caso os alemães atacassem, com a chance ainda de cercar as forças alemãs e impor-lhes uma severa derrota. Também poderia, nesse caso, exercer alguma pressão, ainda que moderada, sobre uma retirada alemã.

A representação simplificada dessa situação como um jogo estritamente competitivo pode ser observada na Figura 5.2:

Bradley	Von Kluge	
	Atacar	Recuar
Avançar	−1	1
Aguardar	2	0

Figura 5.2 A Batalha de Mortain

Pede-se:

a. Reescrever o jogo, apresentando as recompensas de Von Kluge para cada combinação de estratégias.
b. Verificar se o jogo possui ponto de sela e, portanto, equilíbrio pelo método minimax-maximin.
c. Verificar se existe algum equilíbrio em estratégias mistas.
d. Representar graficamente as funções de melhor resposta do general Bradley e do marechal Von Kluge.

5.9 Dados um batedor de pênaltis e um goleiro, suponha que as chances de que o gol seja marcado sejam dadas pela forma estratégica a seguir, de acordo com o lado que o batedor e o goleiro escolham:

	Goleiro	
Batedor	**Lado Direito**	**Lado Esquerdo**
Lado Direito	30%	90%
Lado Esquerdo	80%	40%

Pede-se:

a. Verificar se esse é um jogo estritamente competitivo.
b. Verificar se há algum equilíbrio pelo método minimax-maximin.
c. Verificar se há algum equilíbrio em estratégias mistas.
d. Representar graficamente as funções de melhor resposta do batedor e do goleiro, indicando o equilíbrio, se houver.

5.10 Verifique se há algum equilíbrio em estratégias mistas no jogo de coordenação do padrão tecnológico da Figura 3.6, representando graficamente o equilíbrio obtido.

6

Jogos Sequenciais: Avaliando Ameaças e Promessas

A percepção é forte e a visão é fraca. Em estratégia, é importante ver o que está distante como se estivesse perto e ter distanciamento do que está próximo.

MIYAMOTO MUSASHI, SAMURAI, POETA E PINTOR JAPONÊS (1584?-1645)

INTRODUÇÃO

Até aqui estudamos situações de interação estratégica em que cada jogador ignora as escolhas feitas pelos demais jogadores. Nessas circunstâncias, o conceito de equilíbrio de Nash foi uma ferramenta fundamental para análise desse tipo de interação estratégica: quando os jogadores decidem sem conhecer antecipadamente as escolhas dos demais, uma situação de equilíbrio é aquela em que os jogadores estão adotando, todos eles, as melhores respostas possíveis ao que os demais podem vir a fazer. Nesse caso, ninguém ganharia nada se alterasse sua escolha. É nesse sentido que há um equilíbrio.

Há situações, contudo, em que os jogadores efetivamente tomam suas decisões conhecendo antecipadamente as escolhas dos demais jogadores. Pense, por exemplo, em uma partida de xadrez. Ao chegar sua vez de jogar, cada jogador conhece as decisões de seu adversário. Desse modo, ao tomarem suas decisões, os jogadores possuem maior informação do que aquela que é suposta ao modelarmos uma situação de interação estratégica como um jogo simultâneo.

Isso, juntamente com o fato de que estamos considerando sempre que os jogadores são racionais, não nos permite supor que os jogadores tomem suas decisões ignorando o que os demais jogadores decidiram nas etapas anteriores do jogo, uma vez que seja possível ter o acesso a essa informação. Isso seria o equi-

valente a imaginar um jogador de xadrez que toma suas decisões sem considerar os movimentos feitos pelo seu adversário até ali.

Um jogador de xadrez que agisse assim, desconsiderando os movimentos de seu adversário, seria considerado irracional caso seu objetivo fosse ganhar o jogo. Da mesma maneira, em teoria dos jogos, um jogador que ignorasse a história do jogo até o momento em que tem de realizar sua escolha, estando essa história disponível para ele, seria tido como irracional pela teoria, uma vez que ele não estaria empregando de forma eficiente um dos meios de que dispõe (a informação sobre a história do jogo até ali) para alcançar seus objetivos.

Desse modo, a informação de que um jogador dispõe acerca das decisões dos demais jogadores pode alterar de forma bastante significativa as opções do jogador que tem de tomar suas decisões em uma dada etapa do jogo. Esse foi o motivo pelo qual, no Capítulo 2, estudamos as diferenças entre jogos simultâneos e jogos sequenciais. Naquele momento, enfatizamos que a diferença estava muito mais relacionada à informação de que o jogador dispunha do que ao "tempo", entendido como o momento cronológico em que o jogador tomava sua decisão.

Agora, pois, é chegada a hora de estudar mais detalhadamente como devemos analisar um jogo sequencial, ou seja, um jogo em que, em alguma etapa, algum dos jogadores tenha a possibilidade de decidir *conhecendo* a decisão do jogador que o antecedeu.

Veremos a seguir que, nesse tipo de situação, o conceito de equilíbrio de Nash que vínhamos aplicando até aqui pode não ser totalmente satisfatório. Teremos então a oportunidade de apresentar um aperfeiçoamento desse conceito de equilíbrio, que nos permitirá dar conta de processos de interação estratégica em que os jogadores tomam suas decisões sequencialmente.

OS LIMITES DO EQUILÍBRIO DE NASH EM UM JOGO SEQUENCIAL: O JOGO DA ENTRADA

Tivemos oportunidade de discutir no Capítulo 2, ainda que brevemente, um modelo que descreve a interação estratégica entre duas empresas – uma que deseja ingressar em um mercado e outra que já se encontra nesse mercado, estabelecida como empresa dominante. Naquele exemplo, chamamos a empresa estabelecida de empresa *Dominante*. A empresa que planejava ingressar no mercado foi chamada de *Desafiante*.

A Desafiante possui duas ações possíveis: entrar no mercado (a ação {Entra}) ou não entrar no mercado (a ação {Não Entra}). Vimos naquele exemplo que, uma vez que a Desafiante tenha decidido entrar, é a vez da empresa Dominante de decidir entre duas ações possíveis: {Luta} ou {Acomoda}.

Vimos também no Capítulo 2 que lutar, no jargão dos estudos de organização industrial, significa adotar reduções de preços, campanhas publicitárias agressivas etc., na tentativa de manter sua participação no mercado inalterada. O objetivo dessa opção estratégica, por parte de uma empresa já estabelecida no mercado, é tentar manter sua produção inalterada, impedindo que a empresa que entra no mercado consiga uma participação suficiente para garantir o retorno dos seus investimentos no setor.

No caso do nosso exemplo, a possibilidade de que a Dominante decida lutar representa uma ameaça significativa para a Desafiante, pois usualmente as novas empresas em um setor realizam grandes investimentos em capacidade produtiva, rede de distribuição etc., e, desse modo, necessitam obter, o mais depressa possível, uma participação no mercado que assegure um retorno adequado dos investimentos, sob pena de desagradar seus sócios ou acionistas.

Portanto, sempre que nos referirmos à opção por parte da empresa já estabelecida no mercado – no nosso exemplo, a empresa Dominante –, estaremos nos referindo à decisão estratégica de manter sua produção inalterada diante da entrada de uma nova empresa no setor. Mas manter a produção inalterada diante de uma nova entrada no mercado não caracteriza completamente a opção da empresa estabelecida (Dominante) de lutar. É preciso também definir *que nível de produção* a empresa Dominante irá manter inalterado se optar por lutar.

A razão disso é que não basta, se a opção for lutar, manter o nível de produção inalterado caso uma outra empresa ingresse no setor: se o nível de produção fixado for muito pequeno, uma nova empresa não terá qualquer dificuldade para ingressar no mercado e ocupar a demanda insatisfeita!

Com efeito, se o nível de produção fixado pela empresa estabelecida for muito pequeno, o preço no mercado estará, provavelmente, muito elevado, pois haverá pouca oferta para atender à demanda. Consequentemente, uma nova empresa conseguiria vender a sua produção e, apesar de com sua oferta provocar uma queda no preço de mercado (pois sua oferta agora irá se somar à oferta da empresa estabelecida), ainda assim obter, muito provavelmente, um lucro significativo.

Desse modo, fixar a quantidade produzida não é suficiente, do ponto de vista da empresa estabelecida (Dominante), para desestimular a entrada de novos competidores. É preciso também que a produção da empresa Dominante seja suficientemente elevada para que, caso uma nova empresa entre no setor e ofereça seu produto, isso provoque uma redução no preço de mercado abaixo do nível que seria necessário para que a nova empresa obtenha uma lucratividade minimamente adequada.

Mas a opção de lutar envolve um custo significativo, conforme vimos no Capítulo 2, também para a empresa Dominante, que vê sua margem de lucro di-

minuir pela redução de preço, que é provocada pela maior produção fixada pela Dominante como um desestímulo à entrada de uma nova empresa; ou pelo aumento de custos que resultam de mais despesas com publicidade e comercialização. A alternativa da Dominante é acomodar a entrada de uma nova empresa reduzindo sua própria produção.

Embora restringir a própria produção possa reduzir os lucros pela diminuição na quantidade vendida, essa redução muitas vezes tende a ser menor do que a que seria provocada pela opção de lutar. Nesse último caso, em geral, a tentativa da empresa Dominante de manter sua participação no mercado envolve redução significativa de preços, o que reduz sua receita, e gastos expressivos com publicidade e comercialização, o que aumenta seus custos.

A combinação de redução de receitas e aumento de custos costuma provocar uma redução de lucros muito mais expressiva do que simplesmente acomodar a entrada de uma nova empresa no mercado, reduzindo sua produção.[1] Considere assim o jogo da entrada na Figura 2.7, reproduzido novamente na Figura 6.1:

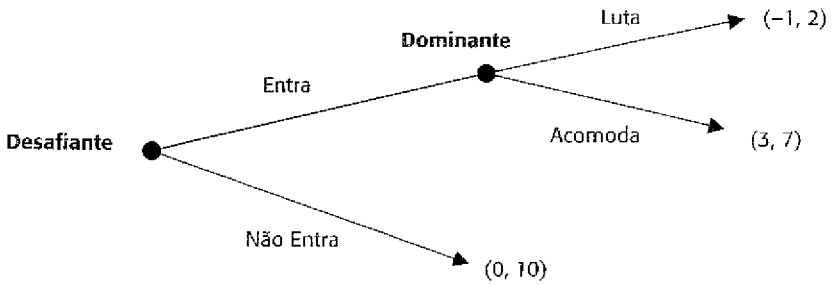


Figura 6.1 O Jogo da Entrada

Na Figura 6.1, observamos novamente as recompensas de cada jogador, para cada combinação de estratégias, em termos dos lucros de cada empresa. Vimos no Capítulo 2 que caso a empresa Desafiante decida não entrar, seu lucro é de zero, enquanto o lucro da Dominante é máximo: 10 milhões.

Já no caso da Desafiante decidir entrar no mercado e a Dominante decidir lutar, a Desafiante tem um prejuízo de 1 milhão (representado pela recompensa de –1), e os lucros da Dominante se reduzem para 2 milhões. Para encerrar, se a Dominante acomoda a entrada da Desafiante, os lucros da Desafiante são de 3 milhões, enquanto os lucros da Dominante são de 7 milhões.

1 Veremos mais adiante que a empresa Dominante pode alterar essa situação, adotando uma decisão estratégica que torna irrevogável sua opção por uma produção mais elevada, o que desestimula a entrada de uma empresa rival.

Vamos agora aplicar o conceito de equilíbrio de Nash ao jogo da entrada da Figura 6.1. Para facilitar a aplicação do equilíbrio de Nash ao jogo da entrada, contudo, devemos antes representar esse jogo na forma estratégica ou normal. A representação do jogo da Figura 6.1 em forma estratégica pode ser vista na Figura 6.2 seguinte:[2]

	DOMINANTE	
DESAFIANTE	**Luta**	**Acomoda**
Entra	−1, 2	3, 7
Não Entra	0, 10	0, 10

Figura 6.2 O Jogo da Entrada em Forma Estratégica

A partir da representação do jogo da entrada na forma estratégica, vejamos se há algum equilíbrio de Nash nesse jogo. Aplicamos na Figura 6.2 (a) novamente o artifício de assinalar os maiores valores nas linhas, para uma mesma coluna, com um "l", e os maiores valores nas colunas, para uma mesma linha, com um "c" – exatamente como fizemos nos jogos analisados no Capítulo 3.

	DOMINANTE	
DESAFIANTE	**Luta**	**Acomoda**
Entra	−1, 2	(l) 3, 7 (c)
Não Entra	(l) 0, 10 (c)	0, 10 (c)

Figura 6.2 (a) O Jogo da Entrada em Forma Estratégica: Equilíbrios de Nash

Analisemos inicialmente o caso da Desafiante. Na figura 6.2 (a), caso a Dominante decida lutar, o melhor que a Desafiante tem a fazer é não entrar, pois, nesse caso, ela obtém uma recompensa de zero, contra uma recompensa de −1 (um prejuízo de 1 milhão) caso decida entrar: indicamos esse fato assinalando com um "l" o maior valor nas linhas que correspondem às estratégias da Desafiante, dada a coluna que representa a estratégia {Luta} da empresa Dominante.

Alternativamente, caso a Dominante decida acomodar, o melhor que a Desafiante tem a fazer é entrar, pois, nesse caso, ela obtém uma recompensa de 3 milhões, contra uma recompensa de zero caso decida não entrar: indicamos esse fato assinalando com um "l" o maior valor nas linhas que correspondem às

2 Se o leitor tiver alguma dificuldade com a representação do jogo da entrada em forma estratégica, sugerimos rever a discussão desse mesmo jogo no Capítulo 2.

estratégias da Desafiante, dada a coluna que representa a estratégia {Acomoda} da empresa Dominante.

Vejamos agora o caso da Dominante. Na Figura 6.2 (a), caso a Desafiante decida entrar, o melhor que a Dominante tem a fazer é acomodar, pois, nesse caso, ela obtém uma recompensa de 7 milhões de lucro, contra uma recompensa de apenas 2 milhões de lucro caso decida lutar: indicamos esse fato assinalando com um "c" o maior valor nas colunas que correspondem às estratégias da Dominante, dada a linha que representa a estratégia {Entra} da empresa Desafiante.

Por outro lado, caso a Desafiante decida não entrar, não há uma estratégia que unicamente seja a melhor resposta por parte da Dominante, pois, em qualquer caso, lute ou acomode, a Dominante obtém uma recompensa de 10 milhões: indicamos esse fato assinalando com um "c" os dois valores nas colunas que correspondem às duas estratégias da Dominante, dada a linha que representa a estratégia {Não Entra} da empresa Desafiante.

Obtemos assim dois equilíbrios de Nash: (Entra, Acomoda) e (Não Entra, Luta). O primeiro equilíbrio, sem dúvida, parece ser um equilíbrio do jogo que estamos analisando, o jogo da entrada. Isso porque, caso a Desafiante decida entrar, o melhor que a Dominante tem a fazer, conhecendo a decisão da Desafiante, é acomodar.

Inversamente, tendo a empresa Dominante tomado a decisão de acomodar, a decisão da Desafiante de entrar no mercado comprovou efetivamente ser uma escolha racional. As estratégias selecionadas são, desse modo, as melhores respostas recíprocas, e o primeiro equilíbrio de Nash encontrado, representado pela combinação de estratégias (Entra, Acomoda), parece fazer sentido como solução desse jogo.

Mas consideremos agora o outro equilíbrio de Nash selecionado: (Não Entra, Luta). Há algo estranho com esse equilíbrio de Nash: ele sugere que a estratégia da Dominante de lutar é a melhor resposta à escolha da Desafiante de não entrar. Mas isso não parece fazer muito sentido porque, caso a Desafiante tivesse decidido entrar, lutar resultaria em uma recompensa menor do que acomodar!

Na verdade, considerando-se que o jogo da entrada da Figura 6.1 é uma representação adequada da interação estratégica das duas empresas, é razoável concluir que, na verdade, *a estratégia* {Luta} *nunca será empregada pela Dominante*. Parece incompreensível, desse modo, que a estratégia {Luta} da empresa Dominante faça parte de um equilíbrio, uma vez que, caso se apresente a situação em que seja necessário empregá-la, utilizá-la seria uma escolha irracional por parte da empresa Dominante. Por que isso ocorre?

Isso ocorre porque, uma vez que o equilíbrio de Nash apenas exige que as estratégias empregadas pelos jogadores sejam as melhores respostas umas às outras, *sem considerar a ordem em que os jogadores tomam suas decisões*, as estratégias dos jogadores, selecionadas pelos equilíbrios de Nash, não são afetadas pelo que acontece fora do equilíbrio.

Mais especificamente, como se a Desafiante escolher não entrar a resposta da Dominante se torna irrelevante para a determinação das recompensas, para o equilíbrio de Nash se torna, portanto, indiferente a estratégia da Dominante que irá compor o equilíbrio, mesmo que seja uma estratégia irracional, na hipótese de se apresentarem as circunstâncias em que ela teria de ser jogada.

Essa é a razão de termos obtido um equilíbrio que não reflete a interação estratégica dos jogadores: o equilíbrio (Não Entra, Luta). A consequência disso é que o equilíbrio de Nash tende sempre a gerar um número "excessivo" de equilíbrios em um jogo sequencial de informação perfeita,[3] quando esses equilíbrios são examinados à luz do processo de interação estratégica entre os jogadores.

Precisamos, assim, dar conta não apenas da condição de que as estratégias dos jogadores sejam as melhores respostas umas às outras, mas também da *ordem* em que os jogadores tomam as suas decisões. Como veremos, para isso precisamos encontrar um critério que *restrinja* o número de equilíbrios que resultam da aplicação do conceito de equilíbrio de Nash a jogos sequenciais, de forma a dar conta da ordem em que os jogadores tomam suas decisões.

Esse refinamento do equilíbrio de Nash é o **equilíbrio de Nash perfeito em subjogos**, que estudaremos a seguir.

O EQUILÍBRIO DE NASH PERFEITO EM SUBJOGOS

Antes de apresentarmos o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, precisamos conhecer o conceito de *subjogo*. O conceito de subjogo está relacionado aos possíveis desdobramentos de um processo de interação estratégica em que os jogadores tomam suas decisões em uma ordem predeterminada.

Vejamos, assim, como podemos reconhecer um subjogo em um jogo sequencial, que será nossa ferramenta indispensável na identificação dos equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos. Abaixo oferecemos uma caracterização de um subjogo, por intermédio das condições a que ele deve obedecer:

3 A definição de jogos de informação perfeita foi apresentada no Capítulo 2.

Um **subjogo** é qualquer parte de um jogo na forma extensiva que obedece às seguintes condições:

1. Sempre se inicia em um único nó de decisão.
2. Sempre contém todos os nós que se seguem ao nó no qual ele se iniciou.
3. Se contiver qualquer nó de um conjunto de informação, ele conterá todos os nós do conjunto de informação.

A melhor forma de fixar o conceito de subjogo é por intermédio de uma visualização da aplicação desse conceito em uma forma estendida. Assim, considere uma hipotética forma estendida, apresentada na Figura 6.3. Nela ilustraremos as condições que uma dada extensão da representação em forma estendida de um jogo deve preencher para constituir um subjogo.

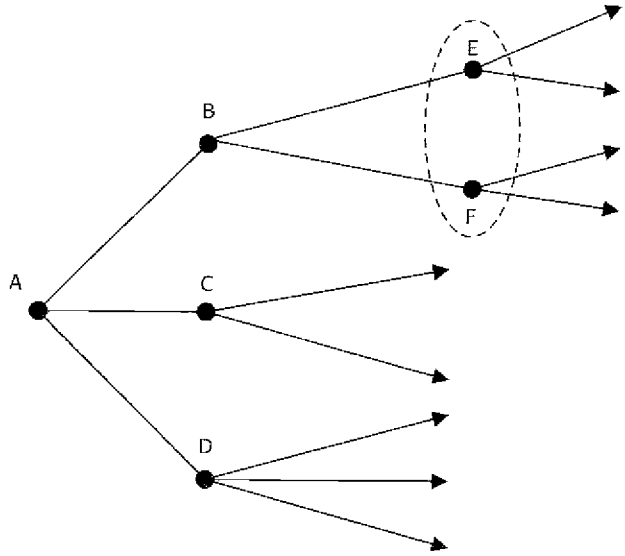


Figura 6.3

Abstraímos do jogo da Figura 6.3, tanto as indicações quanto a que nó pertence a que jogador, como quais são as ações a que correspondem os ramos e as recompensas que os jogadores obtêm para cada combinação de estratégias. Nosso objetivo foi focalizar apenas a determinação dos subjogos nesse hipotético jogo na forma estendida. Identificamos os nós da forma estendida do jogo por seis letras: A, B, C, D, E, F.

Inicialmente, é importante saber que sempre começamos identificando um subjogo caminhando no sentido contrário da história do jogo: começamos pelo final do jogo, voltando até o nó inicial. Ou seja, andamos de trás para a frente na árvore do jogo que constitui a forma estendida.

De forma mais precisa, um procedimento prático para identificar um subjogo consiste em, inicialmente, selecionar um grupo de nós terminais que sejam precedidos por um mesmo nó. Identificado esse nó predecessor comum, verifica-se se é possível delimitar, a partir desse nó, um subjogo que satisfaça às três características apresentadas anteriormente: que se inicie em um único nó de decisão, que contenha todos os nós que se seguem ao nó no qual se iniciou e que, se contiver um nó de um conjunto de informação, contenha todos os nós do conjunto de informação.

Caso seja possível delimitar um subjogo no nó antecessor aos nós terminais, identificamos aí um subjogo, e aplicamos novamente o mesmo método ao nó que, por sua vez, antecede o nó antecessor dos nós terminais, para avaliar se é possível identificar um subjogo mais amplo, que inclua o subjogo já delimitado.

Caso o nó predecessor dos nós terminais selecionados não permita construir um subjogo com as três características anteriormente mencionadas, repete-se o mesmo procedimento no nó antecessor do nó inicialmente escolhido, mas dessa vez para tentar identificar um primeiro subjogo na forma estendida.

Esse procedimento é repetido para todos os nós que antecedem os nós terminais, até que seja alcançado o nó inicial. Ao alcançarmos o nó inicial, teremos identificado todos os subjogos do jogo.

Vamos aplicar esse procedimento na forma estendida da Figura 6.3, iniciando pelos três nós terminais do ramo inferior. Como o nó que antecede imediatamente esses três nós terminais é o nó assinalado como D, esse será o primeiro nó em que aplicaremos o teste das três condições para identificarmos se, a partir dele, é possível iniciar um subjogo.

Desse modo, teremos de testar se: (1) um possível subjogo começando em D se inicia em um único nó de decisão; (2) se esse possível subjogo a partir de D contém todos os nós que se seguem a D; e (3) se, caso esse conjunto de informação começando em D contenha alguma parte de um conjunto de informação, ele contém todos os nós desse conjunto de informação (caso o leitor tenha alguma dificuldade com o conceito de conjunto de informação, em particular caso tenha problemas para distinguir se o conjunto de informação é ou não unitário, sugerimos que consulte o Capítulo 2).

A primeira condição é satisfeita de imediato: ao se iniciar em D, nosso possível subjogo estará se iniciando em um único nó de decisão. É fácil também identificar que um subjogo que se inicie em D conterá todos os nós que se seguem a D: no caso, os três nós terminais do ramo inferior da árvore da Figura 6.3.

Por último, qualquer subjogo iniciando em D irá satisfazer à terceira condição, que exige que, se um subjogo contiver qualquer parte de um conjunto

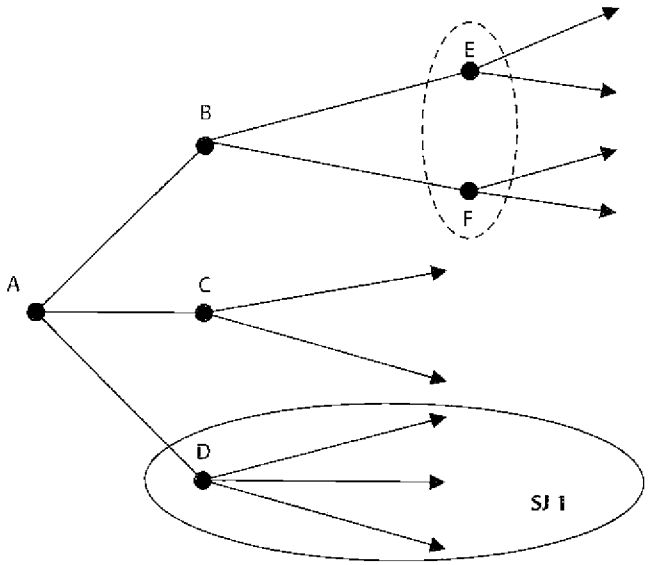


Figura 6.3 (a) Identificando o Subjogo SJ 1

de informação, ele deverá conter todos os nós do conjunto de informação. Como um subjogo iniciado em D contém necessariamente esse nó, e como D é o único elemento do conjunto de informação que contém D, segue-se que necessariamente um subjogo começando em D na Figura 6.3 conterá todos os nós do conjunto de informação.

Podemos assinalar a existência de um subjogo que se inicia em D, traçando uma elipse em torno do trecho da forma estendida que compõe esse subjogo, conforme fizemos na Figura 6.3 (a). Chamamos a esse subjogo de Subjogo 1 (SJ 1).

Vamos repetir agora o mesmo procedimento para o ramo que se encontra no meio da forma estendida, que se inicia em C e prossegue para os dois nós terminais no centro da forma estendida. Mais uma vez, a primeira condição é satisfeita imediatamente: ao começar em C, um possível subjogo estará se iniciando em um único nó de decisão. Também é fácil ver que um subjogo a partir de C conterá todos os nós que se seguem a C, uma vez que conterá os dois nós terminais no centro da forma estendida da Figura 6.3.

Por último, um subjogo que se inicie em C contém necessariamente este nó, e sendo C o único elemento do conjunto de informação que contém C, segue-se que, necessariamente, um subjogo começando em C na Figura 6.3 contém todos os nós do conjunto de informação a que pertence C.

Assim, da mesma forma como fizemos no caso do nó assinalado como D, podemos também identificar a existência de um subjogo que se inicia em C, traçando novamente uma elipse em torno do trecho da forma estendida que com-

põe esse subjogo, como fizemos na Figura 6.3 (b). Chamamos esse subjogo de Subjogo 2 (SJ 2).

Vejamos agora o ramo superior da forma estendida, ramo que se inicia em B, passa por E e F, e acaba em dois pares de nós terminais: um que segue a partir de E, e outro que segue a partir de F. Vamos aplicar o procedimento sugerido, recuando do último par de nós terminais no extremo superior da forma extensiva até o nó antecessor imediato, o nó E. É possível identificar um subjogo começando a partir de E?

A resposta é não. Para entender por que não podemos identificar um subjogo começando a partir de E, basta considerar a primeira e a terceira condições exigidas de um subjogo. Vejamos inicialmente a terceira condição. Ela afirma que se um subjogo contiver qualquer parte de um conjunto de informação, ele conterá todos os nós do conjunto de informação.

Na Figura 6.3 tanto o nó E como o nó F fazem parte de um mesmo conjunto de informação. Assim, pela terceira condição, um subjogo que contenha o nó E também tem de conter o nó F, pois um subjogo terá de conter todos os nós que fazem parte de um mesmo conjunto de informação.

Assim, um subjogo que contenha E também terá de conter F. Contudo, F não é sucessor nem predecessor de E. Como incluir F no mesmo subjogo que E? A primeira condição afirma que um subjogo sempre se inicia em um único nó de decisão. Assim, não podemos iniciar um subjogo simultaneamente em E e em F. A resposta é simplesmente que não podemos iniciar um jogo nem em E nem em F, pois ambos fazem parte de um mesmo conjunto de informação.

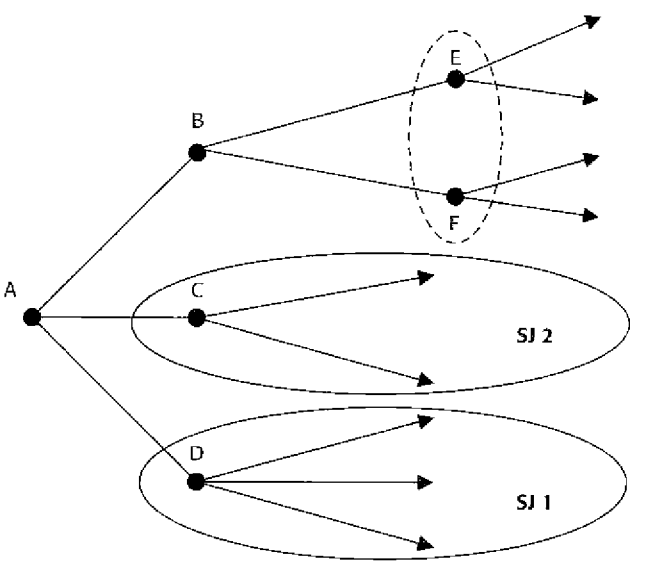


Figura 6.3 (b) Identificando o Subjogo SJ 2

Temos então de retroceder mais uma etapa no jogo da Figura 6.3, indo até o nó que antecede tanto E como F: o nó B. Esse nó preenche as condições para que iniciemos um subjogo a partir dele: o nó B pertence a um conjunto de informação unitário, portanto não temos de incluir nenhum outro nó no mesmo subjogo (ao contrário do nó E, que exige que o nó F seja incluído, e vice-versa), e assim podemos cumprir a exigência da primeira condição (de que o subjogo comece em um único nó) sem problemas.

Resta apenas cumprir a segunda exigência, que impõe que o subjogo contenha todos os nós que se seguem ao nó em que ele se inicia. Fizemos isso na Figura 6.3 (c), na qual assinalamos o subjogo que se inicia a partir de B como Subjogo 3 (SJ 3):

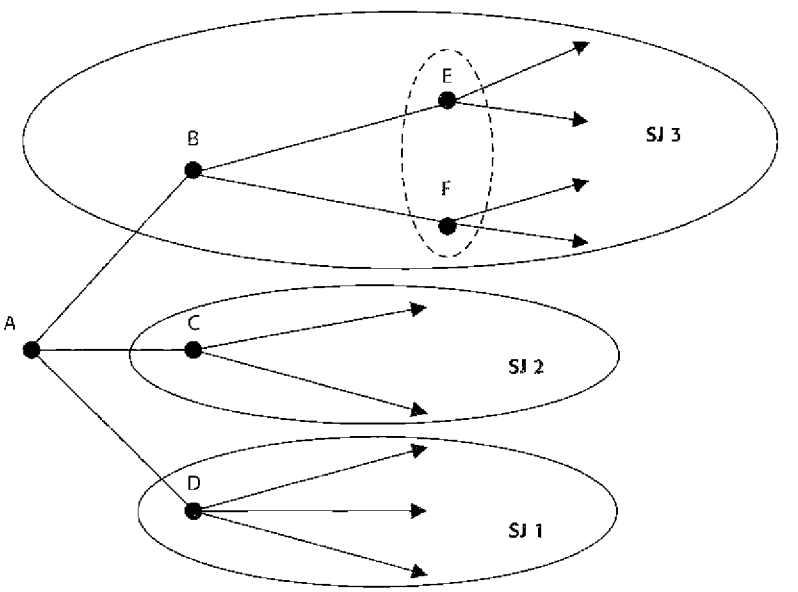


Figura 6.3 (c) Identificando o Subjogo SJ 3

O leitor deve estar se perguntando se o que fizemos até agora esgota todas as possibilidades de encontrarmos subjogos na Figura 6.3. Na verdade, não. Se considerarmos as três condições de subjogo, a saber, que ele se inicie em um único nó, que, contenha todos os nós que, se seguem ao nó em que o subjogo se inicia e que, se contiver algum nó de um conjunto de informação, contenha todos os nós desse conjunto, veremos que o jogo da Figura 6.3, *quando tomado como um todo*, satisfaz essas três condições.

Na verdade, todo jogo sequencial na forma estendida, quando tomado na sua totalidade, sempre satisfará a essas três condições. Em linguagem matemática, diz-se que essas três condições são satisfeitas pelo jogo como um todo de

maneira *trivial*, que é como os matemáticos expressam o fato de uma dada condição ser sempre satisfeita quando aplicada de determinada forma. Em função disso, os subjogos que não são o próprio jogo são identificados com um termo próprio: são chamados **subjogos próprios** de um determinado jogo.

Na Figura 6.3 (d) assinalamos todos os subjogos do jogo da Figura 6.3, incluindo o subjogo que é o jogo como um todo, ao qual denominados Subjogo 4 (SJ 4):

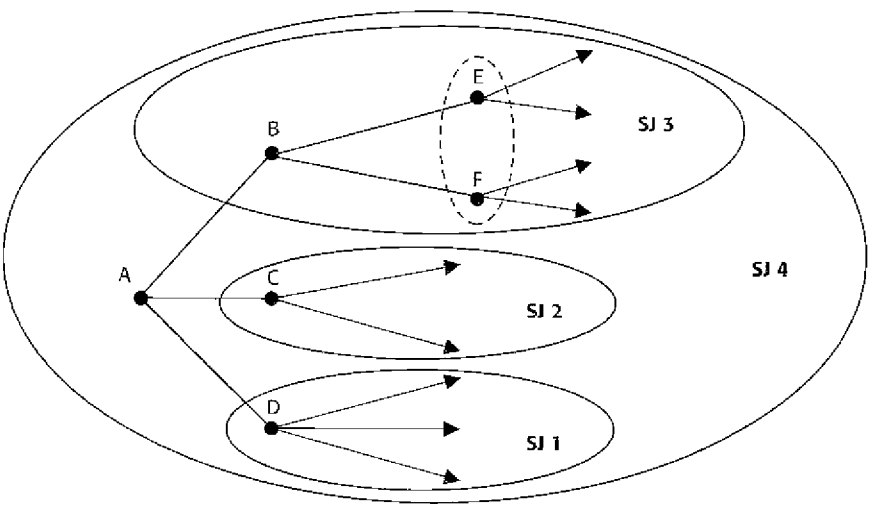
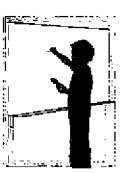


Figura 6.3 (d) Identificando o Subjogo SJ 4

Com isso, identificamos todos os subjogos no jogo da Figura 6.3.

Não basta, contudo, entender como identificar os subjogos em uma forma estendida. É preciso também exercitar a aplicação desse conceito. Assim, a atividade seguinte sugere um exercício muito fácil e útil para o leitor se sentir seguro na aplicação do conceito de subjogos em formas estendidas. Recomendamos fortemente que o leitor desenvolva a atividade a seguir:



Atividade 6.1: Retorne ao jogo da entrada da Figura 6.1 e determine quantos subjogos podem ser identificados nele.

Entendido o conceito de subjogo, estamos prontos para reformular o conceito de equilíbrio de Nash de uma forma mais adequada a jogos sequenciais. Esse desenvolvimento do conceito de equilíbrio de Nash para jogos sequenciais é o conceito de *equilíbrio de Nash perfeito em subjogos*. A seguir temos a definição de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Uma combinação de estratégias é um **equilíbrio de Nash perfeito em subjogos** se ela preenche, simultaneamente, as duas condições seguintes: (a) é um equilíbrio de Nash para o jogo na sua totalidade, e (b) é um equilíbrio de Nash para cada subjogo.

A intuição que fundamenta a busca do equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (daqui por diante falaremos simplesmente em "equilíbrio perfeito") é muito simples e sensata: quando os jogadores fazem suas escolhas sucessivamente, conhecendo as decisões que foram tomadas anteriormente, sendo os jogadores racionais, devemos esperar que eles adotem estratégias que sejam as mais adequadas *em todas as situações possíveis.*

Quando delimitamos um subjogo, o que estamos fazendo é definir um conjunto de situações possíveis de um processo de interação estratégica. Assim, ao exigirmos que um equilíbrio de Nash o seja para todos os subjogos, estamos justamente pedindo *que a combinação de estratégias em questão seja a melhor resposta em todas as situações possíveis do processo de interação estratégica.*

Vamos então analisar quais são os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos ou, mais simplesmente, quais são os **equilíbrios perfeitos**, do jogo da entrada da Figura 6.1. O primeiro passo, quando queremos identificar os equilíbrios perfeitos, é identificar todos os equilíbrios de Nash do jogo. Para isso, é muito útil reescrever o jogo sequencial na forma estratégica, exatamente como fizemos na Figura 6.2.

Depois que o jogo sequencial é escrito na forma estratégica, selecionamos todos os equilíbrios de Nash do jogo, exatamente como fizemos na Figura 6.2 (a). Fazemos isso porque *as combinações de estratégias que são candidatas a equilíbrios perfeitos são apenas as combinações de estratégias que constituem equilíbrios de Nash.* A razão disso é que:

Todo equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é, ao mesmo tempo, um equilíbrio de Nash, mas nem todo equilíbrio de Nash em um jogo sequencial é, necessariamente, um equilíbrio perfeito em subjogos.

O fato de que todo equilíbrio perfeito é, sempre, um equilíbrio de Nash, mas o inverso não é sempre verdadeiro, resulta da própria ideia de refinamento dos equilíbrios de Nash. O objetivo de refinamentos, tais como o conceito de equilíbrio perfeito, conforme vimos anteriormente, é justamente impor uma restrição ao conceito de equilíbrio de Nash.

Assim, como se trata de uma restrição imposta ao conceito de equilíbrio de Nash, um refinamento terá de ser formado por um subconjunto, ou seja, por

uma seleção dos equilíbrios de Nash possíveis. Daí a conclusão de que todo equilíbrio perfeito é também um equilíbrio de Nash, mas nem sempre a recíproca é válida.

Desse modo, nosso ponto de partida serão os dois equilíbrios de Nash identificados na Figura 6.2 (a): (Entra, Acomoda) e (Não Entra, Luta). Para aplicar o conceito de equilíbrio perfeito, temos de testar se esses dois equilíbrios de Nash também o são em cada subjogo. O passo seguinte, portanto, é identificar quantos subjogos existem no jogo da entrada da Figura 6.1.

Na Figura 6.4 encontram-se assinalados os subjogos do jogo da entrada (o leitor deve conferir a identificação desses subjogos com a que realizou na atividade 6.1):

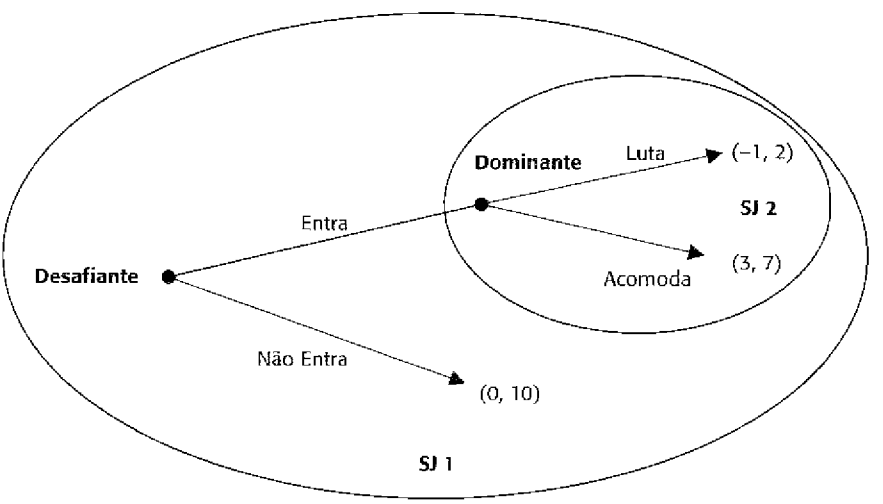


Figura 6.4 O Jogo da Entrada – Determinação do Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos

Vemos então que o jogo da entrada possui apenas dois subjogos: um subjogo que é constituído pelo jogo todo (SJ 1), e um subjogo que se inicia no nó de decisão da Dominante. Tudo o que temos de fazer agora é testar se cada um dos equilíbrios de Nash, (Entra, Acomoda) e (Não Entra, Luta), é um equilíbrio de Nash *em cada* subjogo.

Os dois equilíbrios de Nash (Entra, Acomoda) e (Não Entra, Luta) são, necessariamente, equilíbrios de Nash no SJ 1, ou seja, no jogo como um todo. Isso decorre necessariamente do fato de que eles são equilíbrios de Nash. Assim, por serem equilíbrios de Nash, são equilíbrios *no jogo tomado como um todo*. Para entender isso, temos de investigar se cada combinação de estratégias é constituída por estratégias que são as melhores respostas umas às outras, *considerado todo o desenvolvimento do jogo*.

Quando se considera o desenvolvimento do jogo como um todo, a Desafiante entrar e a Dominante acomodar é, sem dúvida, um equilíbrio: se a Desafiante decidir entrar, a Dominante nada ganha, e até reduz sua recompensa, se mudar sua estratégia de {Acomoda} para {Luta} (veja a Figura 6.4: a recompensa da Dominante se reduz de 7 para 2).

Por outro lado, uma vez que a Dominante tenha escolhido acomodar, uma mudança de estratégia da Desafiante, de {Entra} para {Não Entra}, reduziria sua recompensa. Logo, a Desafiante também não ganharia nada mudando sua estratégia, o que confirma a combinação de estratégias (Entra, Acomoda) como sendo um equilíbrio de Nash no jogo como um todo.

Novamente, quando se considera o desenvolvimento do jogo como um todo, também a combinação de estratégias (Não Entra, Luta) se constitui um equilíbrio de Nash. Com efeito, se a Desafiante tiver escolhido não entrar, a Dominante nada ganha alternando sua estratégia de {Luta} para {Acomoda}: uma vez que a Desafiante não tenha entrado, ambas resultarão na mesma recompensa.

Por sua vez, se a Dominante tiver escolhido lutar, a melhor resposta para a Desafiante é realmente não entrar, pois nesse caso sua recompensa será inferior àquela que teria se permanecesse fora do mercado. Por conseguinte, (Não Entra, Luta) é um equilíbrio do jogo como um todo.

Mas o conceito de equilíbrio perfeito exige mais de uma combinação de estratégias do que simplesmente ser um equilíbrio de Nash no jogo como um todo. É preciso que cada combinação de estratégias seja um equilíbrio de Nash em cada subjogo. Assim, temos de prosseguir com nosso teste dos equilíbrios (Entra, Acomoda) e (Não Entra, Luta) também no único subjogo próprio do jogo da entrada: o subjogo SJ 2.

O subjogo SJ 2 se inicia no nó de decisão da Dominante em que ela está escolhendo lutar ou acomodar, *depois de a Desafiante ter decidido entrar*. Portanto, temos de pesquisar se nos dois equilíbrios de Nash representados por (Entra, Acomoda) e (Não Entra, Luta) a estratégia especificada por cada equilíbrio para a Dominante, *no caso de a Desafiante decidir entrar*, é a melhor resposta. Isso porque, ao concentrarmos nossa atenção no subjogo SJ 2, estamos considerando *apenas o desdobramento da situação de interação estratégica entre Dominante e Desafiante no caso de a Desafiante ter escolhido entrar.*

Esse procedimento corresponde ao objetivo do conceito de equilíbrio perfeito de selecionar apenas aqueles equilíbrios que sejam as melhores respostas *em qualquer situação do jogo que venha a se verificar*. É praticamente imediata a conclusão de que a combinação de estratégias representada por (Entra, Acomoda) efetivamente é um equilíbrio de Nash no subjogo SJ 2: uma vez que a

Desafiante tenha escolhido entrar, a melhor resposta para a Dominante é {Acomoda}.

Desse modo, a combinação de estratégias (Entra, Acomoda) é um equilíbrio perfeito, pois é um equilíbrio de Nash nos dois subjogos do jogo da entrada: o subjogo que é o jogo todo, SJ 1, e o subjogo próprio SJ 2. Mais uma vez é importante enfatizar que o fato de a combinação de estratégias passar pelo teste de ser um equilíbrio de Nash no subjogo SJ 1, que é o jogo como um todo, não deve nos surpreender, pois um equilíbrio de Nash é sempre um equilíbrio no jogo sequencial como um todo.

Vejamos agora o equilíbrio de Nash constituído pela combinação de estratégias (Não Entra, Luta). É sempre bom repetir que no subjogo SJ 2 estamos considerando apenas o desdobramento do jogo da entrada no caso de a Desafiante ter escolhido entrar. Assim, temos de nos perguntar se a combinação de estratégias (Não Entra, Luta) oferece a melhor reposta para a Dominante no caso de a Desafiante entrar.

Na Figura 6.4 é fácil ver que (Não Entra, Luta) *não* oferece a melhor reposta para a Dominante no caso de a Desafiante entrar. Caso a Desafiante entre, a melhor reposta para a Dominante não é lutar, mas sim acomodar. Logo, (Não Entra, Luta) *não* é um equilíbrio perfeito, pois não é um equilíbrio de Nash no subjogo SJ 2, e assim não é um equilíbrio de Nash em todos os subjogos (é um equilíbrio de Nash apenas no subjogo que é o jogo como um todo: o SJ 1).

Mais adiante, ao tratarmos de ameaças e promessas críveis, teremos a oportunidade de exercitar a noção de equilíbrio perfeito em um jogo um pouco mais complexo do que o jogo da entrada. Agora, contudo, é o momento de discutirmos um pouco um método alternativo de solução de jogos sequenciais: o método da indução reversa.

O MÉTODO DA INDUÇÃO REVERSA

Existe um procedimento alternativo de seleção entre os vários equilíbrios de Nash que um jogo sequencial pode apresentar: esse procedimento é chamado de **indução reversa**. Para aplicar o método da indução reversa em um jogo sequencial, começamos analisando o jogo de trás para a frente, indo das recompensas dos jogadores até o primeiro nó de decisão que aparece isoladamente, e procurando identificar as melhores opções para cada jogador.

Uma vez identificado o ramo da árvore de jogos que conduz ao melhor resultado, quando analisado de trás para a frente, das recompensas dos jogadores até o primeiro nó de decisão que compõe um conjunto de informação unitário,

apague os demais ramos dessa etapa de sua análise. Com isso você obterá um jogo mais simples. Repita então a operação até chegar ao nó inicial do jogo.

Vamos aplicar esse método ao mesmo jogo da entrada no qual acabamos de investigar os equilíbrios de Nash, para selecionar os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos. Assim, a primeira etapa da aplicação do método da indução reversa seria eliminarmos os ramos que representam as opções da Dominante, a última empresa a tomar uma decisão, que não são ótimas.

Nesse caso, isso significa "apagar" o ramo que corresponde à estratégia {Luta} da Dominante, como fizemos na Figura 6.5 (a), indicando que o ramo não será considerado ao representá-lo tracejado:

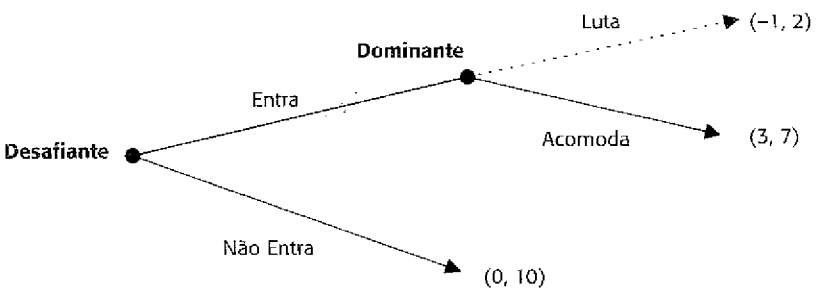


Figura 6.5 (a) Aplicando o Método da Indução Reversa ao Jogo da Entrada

Assim, acabamos por obter na realidade um jogo mais simples, que poderia ser reapresentado na forma da Figura 6.5 (b):

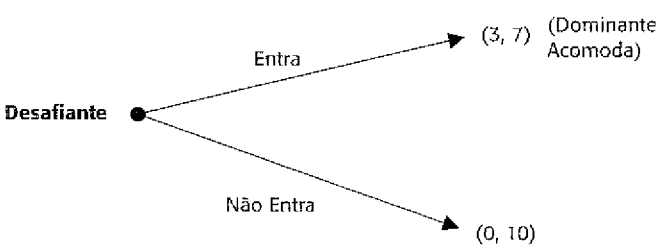


Figura 6.5 (b) Aplicando o Método da Indução Reversa ao Jogo da Entrada

O leitor deve notar que, além de omitirmos a estratégia {Luta} da empresa Dominante na Figura 6.5 (b), também eliminamos o outro ramo, que indicava a outra estratégia da Dominante, a estratégia que ela efetivamente escolhe: {Acomoda}. Fizemos isso porque já sabemos que {Acomoda} será a estratégia escolhida pela Dominante no final do jogo. Assim, podemos apenas indicar diretamente a recompensa dos jogadores no novo nó terminal, que se inicia agora onde antes a Dominante decidia se lutaria ou acomodaria a entrada da Desafiante.

Também eliminamos do nosso jogo simplificado a indicação das recompensas dos jogadores caso a Dominante escolhesse lutar depois de a Desafiante ter escolhido entrar, pois, ao eliminarmos essa estratégia como a pior opção para a Dominante, as recompensas se tornaram irrelevantes para a análise do resultado do jogo. Podemos então nos concentrar exclusivamente na escolha que a Desafiante terá de fazer.

Também para a Desafiante, "apagamos" o ramo que representa a pior estratégia para ela, das opções que ela possui. Foi isso que fizemos na Figura 6.5 (c), ao "apagarmos" o ramo que corresponde à estratégia {Não Entra}, reescrevendo-o com uma linha tracejada.

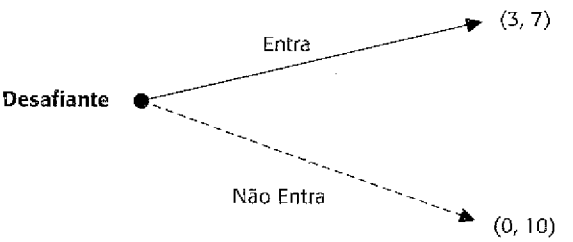


Figura 6.5 (c) Aplicando o Método da Indução Reversa ao Jogo da Entrada

Chegamos assim ao resultado do jogo da entrada: a Desafiante entra e a Dominante acomoda. Esse é o mesmo resultado que encontramos ao investigarmos os equilíbrios perfeitos nesse jogo. Na verdade, a correspondência entre o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos e a solução por indução reversa pode ser estabelecida de forma geral, para o caso dos jogos de informação perfeita, isto é, para o caso dos jogos em que todos os conjuntos de informação são unitários:[4]

Em um jogo sequencial de informação perfeita, uma combinação de estratégias é um equilíbrio perfeito em subjogos se, e somente se, essa combinação é selecionada como um equilíbrio de Nash por intermédio de indução reversa.

O estudo das propriedades do equilíbrio perfeito de Nash possui um interesse particular, que vamos estudar agora: ele nos permite identificar quando ameaças (ou promessas) de outros jogadores podem ou não ser levadas a sério. Isso pode ser muito útil em processos de interação estratégica, no mundo da economia, dos negócios, da política e, algumas vezes, da guerra.

---

4 O princípio da indução reversa *não* implica que a combinação de estratégias selecionada como de equilíbrio será ótima de Pareto. O leitor deve verificar esse fato no exercício 6.1, no final do capítulo.

QUANDO ACREDITAR (OU NÃO) EM AMEAÇAS E PROMESSAS

Vimos no jogo da entrada da Figura 6.1 uma situação de interação estratégica em que a empresa Desafiante decidia se entrava ou não em um mercado, e no qual uma empresa Dominante decidia se, após conhecer a decisão da Desafiante, lutava tentando manter sua participação inalterada ou se acomodava a entrada.

Imagine agora que, antes de a Desafiante decidir se entra ou não no mercado, o presidente da empresa Dominante tivesse dado uma entrevista aos jornais, afirmando que a empresa Dominante faria tudo que fosse possível para competir com qualquer concorrente que ingressasse no seu mercado, de forma a não perder qualquer parcela de mercado para um eventual novo concorrente. Sem dúvida, isso seria uma ameaça. Mas, se você fosse o executivo da empresa Desafiante, levaria essa ameaça a sério?

Caso o jogo da entrada fosse uma descrição simplificada, porém bastante fiel, da situação de interação estratégica entre a Dominante e a Desafiante, a resposta é, simplesmente, *não*. A razão para isso é que *a ameaça de lutar, por parte da empresa Dominante, não faz parte de um equilíbrio perfeito*: caso a Desafiante entre no mercado, ou seja, caso o subjogo SJ 2 da Figura 6.4 seja alcançado, a melhor resposta para a Dominante não é lutar, e sim acomodar.

Antecipando isso, seja pela análise de qual dos equilíbrios de Nash é também um equilíbrio perfeito, ou por indução reversa, o leitor, se fosse o executivo-chefe da empresa Desafiante, entraria no mercado da empresa Dominante, sabendo que ela acomodaria a entrada. Portanto, a ameaça não deveria ser levada a sério. Em terminologia de jogos, a **ameaça não seria crível.**

A lógica por trás dessa análise é muito simples. Não é crível, ou seja, não se deve acreditar em uma ameaça que, caso ocorra uma situação em que se faça necessário efetivá-la, não seja do interesse do próprio jogador que fez a ameaça levá-la a cabo. Somente ameaças que, caso tenham de ser efetivadas, sejam do interesse do jogador que ameaçou realmente concretizá-las devem ser levadas a sério.

O mesmo vale para *promessas*. Somente são críveis as promessas feitas por um jogador que, caso se apresente a situação em que terá de cumpri-las, realmente tenha interesse em mantê-las. Caso contrário, ou seja, se, ao ser alcançado o subjogo em que o jogador que fez as promessas tem de escolher se as cumpre ou não, esse jogador obtiver uma recompensa maior ao deixar de cumprir as promessas, **essas promessas não serão críveis.**

A importância de se avaliar adequadamente a credibilidade de uma promessa pode ser ilustrada no jogo da regulação de tarifas, que apresentamos a se-

guir.[5] Considere uma empresa de serviços de infraestrutura (pode ser uma empresa que opere uma rodovia, uma ferrovia, a distribuição de energia elétrica, de gás etc.). Essa empresa tem de decidir o volume e o tipo de investimento que deve realizar.

A empresa de infraestrutura possui duas opções de investimento: realizar um investimento elevado em máquinas e equipamentos modernos, de forma a estar pronta para atender a qualquer demanda futura de seus serviços com serviços de boa qualidade, ou realizar um investimento reduzido, com máquinas e equipamentos tradicionais, que se mostre insuficiente para atender a rodo o crescimento previsto da demanda com serviços de boa qualidade.

Depois que a empresa de infraestrutura escolheu seu investimento, é a vez do regulador, que vamos supor não possuir autonomia e estar suscetível, portanto, a sofrer pressões políticas, de escolher a tarifa que irá remunerar a empresa de infraestrutura. O regulador também tem duas alternativas: escolher uma tarifa rentável, ou seja, uma tarifa que remunere adequadamente os investimentos, ou escolher uma tarifa insuficiente, que não remunere adequadamente os investimentos da empresa de infraestrutura.

Vamos chamar a ação do regulador de escolher uma tarifa rentável de {Remunera} e a ação do regulador de escolher uma tarifa insuficiente de {Não Remunera}. As escolhas da empresa serão chamadas de {Investimento Elevado} e {Investimento Baixo}. O jogo está representado na Figura 6.6:

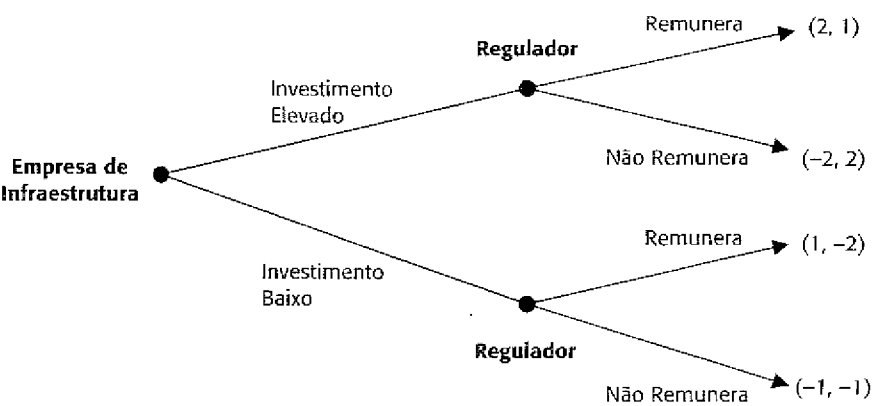


Figura 6.6 O Jogo da Regulação

5 Esse jogo é uma versão modificada e muito simplificada da discussão apresentada por David M. Newbery, em seu livro *Privatization, Restructuring, and Regulation of Network Utilities* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1999)

Vejamos o sentido das recompensas do jogo da regulação da Figura 6.6. Podemos considerar que, ao assinar o contrato de concessão com a empresa de infraestrutura, o regulador estava, na verdade, fazendo uma promessa. A promessa era de que, desde que a empresa aceitasse investir no setor de infraestrutura e que suas tarifas fossem controladas pelo regulador, a empresa teria uma tarifa adequada para remunerar seu investimento.

Desse modo, as recompensas expressam as preferências da empresa de infraestrutura e do regulador em relação às possíveis circunstâncias em que a promessa do regulador é mantida ou abandonada. Em outras palavras, como temos enfatizado em toda a nossa discussão de jogos, as recompensas dos jogadores na Figura 6.6 não devem ser entendidas como significando os ganhos dos jogadores em termos de alguma medida concreta, e sim como as preferências desses jogadores em relação aos possíveis resultados do jogo.

Assim, na Figura 6.6, a empresa de infraestrutura prefere a situação em que ela faz um investimento elevado e a tarifa fixada pelo regulador remunera seu investimento (recompensa de 2) – pois nesse caso os lucros são elevados – a uma situação em que a empresa faz um baixo investimento e a tarifa fixada pelo regulador remunera os investimentos (recompensa de 1), pois nesse caso os lucros serão menores, já que ela atenderá a uma demanda menor com menor produtividade.

Por outro lado, na Figura 6.6, observamos que a empresa prefere fazer um investimento baixo e ter uma tarifa que remunere suas inversões a investir o mesmo valor e a tarifa não ser adequada (recompensa de –1). A pior situação, porém, é aquela em que a empresa faz um investimento elevado e o regulador estabelece uma tarifa que não remunera o investimento feito: nesse caso, o prejuízo da empresa de infraestrutura é significativo, o que é indicado pela menor recompensa que a empresa obtém entre todas as combinações de estratégias do jogo: – 2.

Para o regulador, na Figura 6.6, a melhor situação é aquela em que a empresa realiza investimentos elevados e a tarifa é fixada em um nível baixo, que não remunera os investimentos realizados (recompensa de 2). A explicação para isso é que o regulador obtém um ganho político expressivo nesse caso: o serviço de infraestrutura é prestado à população a baixo preço e em volume e qualidade que atendem às demandas da população.

A Figura 6.6 mostra que a segunda melhor situação para o regulador é aquela em que a empresa de infraestrutura realiza investimentos elevados e o regulador fixa uma tarifa que remunera esses investimentos (recompensa de 1). A razão de ser esta a segunda melhor situação para o regulador é que, apesar de o serviço estar sendo prestado em quantidade e com qualidade adequadas à demanda, a tari-

fa é mais cara, e assim seus ganhos políticos não são tão significativos como no caso anterior.

Comparativamente pior para o regulador, na Figura 6.6, é a situação em que a empresa de infraestrutura realiza um investimento baixo, que resulta em serviços em quantidade e qualidade insatisfatórias, e o regulador fixa uma tarifa que não remunera esses investimentos (recompensa de –1). Nesse caso, há descontentamento popular com a baixa oferta e a qualidade dos serviços. Contudo, uma parte desse descontentamento é compensada pelo fato de que o preço dos serviços é baixo.

Porém, a situação menos desejada pelo regulador na Figura 6.6 é aquela em que o volume dos investimentos é baixo, mas a tarifa remunera adequadamente esses investimentos (recompensa de –2): nesse caso, não há nenhum atenuante em relação ao descontentamento popular: os serviços não são adequados e o preço deles também não é barato (ainda que a tarifa seja mais baixa do que no caso em que a empresa faz um volume de investimentos elevado e o regulador estabelece uma tarifa que remunera esses investimentos).

O que acontecerá então? A promessa do regulador é crível? Para responder a essa pergunta, temos de seguir os passos para se encontrar os equilíbrios perfeitos de um jogo sequencial, que indicamos anteriormente: primeiro colocamos o jogo da Figura 6.6 em forma estratégica. Em seguida, encontramos os equilíbrios de Nash. A partir daí, identificamos os subjogos no jogo da Figura 6.6 em forma estendida. Finalmente, testamos cada equilíbrio de Nash encontrado para saber se algum deles é um equilíbrio de Nash em todos os subjogos.

Assim, como primeiro passo, na Figura 6.7 o jogo da regulação é apresentado em forma estratégica.[6]

	Regulador			
Empresa de Infraestrutura	**Remunera, Remunera**	**Remunera, Não Remunera**	**Não Remunera, Remunera**	**Não Remunera, Não Remunera**
Investimento Elevado	(l) 2, 1	(l) 2, 1	–2, 2 (c)	–2, 2 (c)
Investimento Baixo	1, –2	–1, –1 (c)	(l) 1, –2	(l) –1, –1 (c)

Figura 6.7: O Jogo da Regulação em Forma Estratégica

6 Caso o leitor tenha alguma dificuldade em representar o jogo da regulação da Figura 6.6 na forma estratégica, sugerimos uma consulta ao Capítulo 2.

Já indicamos na forma estratégica da Figura 6.7 os maiores valores entre as linhas, para cada coluna, com um (l), e os maiores valores nas colunas, para cada linha, com um (c), de forma a identificar os equilíbrios de Nash.

Nesse caso, nosso trabalho é facilitado pelo fato de que há apenas um equilíbrio de Nash a ser pesquisado: aquele em que a empresa de infraestrutura escolhe realizar um baixo investimento e o regulador escolhe sempre estabelecer uma tarifa pelo serviço que não remunera o investimento da empresa de infraestrutura, seja ele elevado ou baixo. Será que esse equilíbrio de Nash é um equilíbrio perfeito?

Para responder a essa pergunta, temos, em primeiro lugar, de considerar que se pode provar que, em jogos sequenciais de informação perfeita do tipo que estamos estudando, caso nenhum dos jogadores obtenha recompensas iguais em dois nós terminais quaisquer, há um único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Desse modo, um jogo com as características do jogo da regulação anterior, em que nenhum dos dois jogadores obtém recompensas iguais em nenhum nó terminal, tem apenas um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Mas também vimos anteriormente que todo equilíbrio perfeito é também um equilíbrio de Nash. Por conseguinte, se em um jogo sequencial de informação perfeita, em que nenhum dos jogadores obtém a mesma recompensa em dois nós quaisquer, encontrarmos um único equilíbrio de Nash, como esse jogo também possuirá um único equilíbrio perfeito (o qual também é um equilíbrio de Nash), esse equilíbrio de Nash único será também o equilíbrio perfeito do jogo.

Portanto, a resposta à pergunta acerca de se o equilíbrio de Nash (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) é também um equilíbrio perfeito é afirmativa, por ser o jogo da regulação um jogo sequencial de informação perfeita, nenhum dos jogadores ter recompensas repetidas em dois nós terminais e haver apenas esse equilíbrio de Nash.

Contudo, vamos mesmo assim testar se o único equilíbrio de Nash do jogo da regulação da Figura 6.6 é um equilíbrio perfeito, empregando o método que foi apresentado, como exercício. O primeiro passo é verificar se esse equilíbrio de Nash é um equilíbrio em todos os subjogos do jogo da entrada em sua forma extensiva. Na Figura 6.8 estão assinalados os subjogos do jogo da regulação da Figura 6.6:

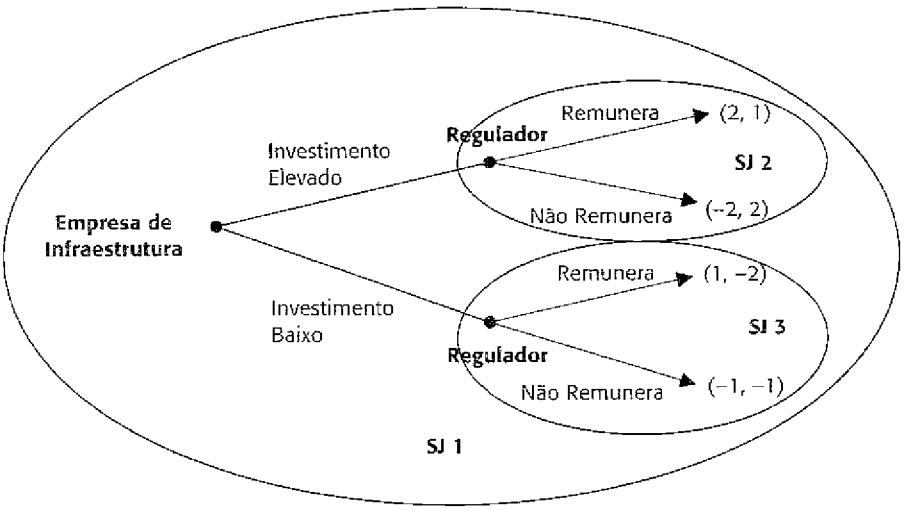


Figura 6.8 Os Subjogos do Jogo da Regulação

Na Figura 6.8, o subjogo SJ 1 representa o jogo todo. O subjogo SJ 2 representa o desdobramento do jogo que se inicia com o regulador decidindo se remunera ou não remunera o investimento da empresa de infraestrutura, depois que a empresa decidiu realizar um investimento elevado. Finalmente, o subjogo SJ 3 representa a sequência do jogo que se inicia com o regulador decidindo se remunera ou não remunera o investimento da empresa de infraestrutura, depois que a empresa decidiu realizar um investimento baixo.

Vamos considerar então o único equilíbrio de Nash que encontramos na representação em forma estratégica do jogo da regulação, na Figura 6.7: (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)). Por ser um equilíbrio de Nash, a combinação de estratégias (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) é um equilíbrio de Nash no subjogo que é o jogo como um todo, ou seja, SJ 1.

Para testarmos esse equilíbrio de Nash no subjogo que se inicia após a empresa de infraestrutura ter decidido realizar um investimento elevado, ou seja, no subjogo SJ 2, temos apenas de considerar se o equilíbrio de Nash (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) representa a melhor resposta para o regulador no subjogo SJ 2.

Para isso, temos de considerar o segundo par da combinação de estratégias, o par (Não Remunera, Não Remunera), que representa a estratégia do regulador. Essa estratégia oferece a melhor resposta caso a empresa realize um investimento elevado? Vamos considerar *o primeiro elemento* desse segundo par, que representa a ação {Não Remunera} *caso a empresa de infraestrutura decida realizar um investimento elevado.*

Podemos ver na Figura 6.8 que a recompensa do regulador por não adotar uma tarifa que remunere a empresa de infraestrutura, caso esta última decida realizar investimentos elevados (recompensa de 2), supera a recompensa do regulador de adotar uma tarifa que remunere os investimentos da empresa de infraestrutura, nas mesmas circunstâncias (recompensa de 1).

Desse modo, a estratégia do regulador representada por {(Não Remunera, Não Remunera)} oferece a melhor resposta caso a empresa realize um investimento elevado, e com isso a combinação de estratégias (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) demonstra ser um equilíbrio de Nash no subjogo que se inicia após a empresa de infraestrutura ter decidido realizar um investimento elevado, o subjogo SJ 2.

Agora, para testarmos esse equilíbrio de Nash no subjogo que se inicia após a empresa de infraestrutura ter decidido realizar um investimento baixo, no subjogo SJ 3, temos novamente de considerar se o equilíbrio de Nash (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) representa a melhor resposta para o regulador.

Para isso, voltamos a considerar o segundo par da combinação de estratégias, o par (Não Remunera, Não Remunera), que representa a estratégia do regulador. Investigamos então se essa estratégia oferece a melhor resposta caso a empresa realize um baixo investimento. Para isso, consideramos agora o *segundo elemento* desse segundo par, que representa a ação {Não Remunera} *no caso de a empresa de infraestrutura decidir realizar um investimento baixo*.

Retornando à Figura 6.8, a recompensa do regulador por não adotar uma tarifa que remunere a empresa de infraestrutura, caso esta última decida realizar um investimento baixo (recompensa de –1), supera a recompensa do regulador ao adotar uma tarifa que remunere os investimentos da empresa de infraestrutura, nas mesmas circunstâncias (recompensa de –2).

Desse modo, a estratégia do regulador representada por {(Não Remunera, Não Remunera)} oferece também a melhor resposta caso a empresa realize baixo investimento. Logo, a combinação de estratégias (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) demonstra ser um equilíbrio de Nash também no subjogo que se inicia após a empresa de infraestrutura ter decidido realizar um baixo investimento, o subjogo SJ 3.

Como a combinação de estratégias (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) demonstra ser um equilíbrio de Nash em todos os subjogos do jogo da regulação, ou seja, no subjogo SJ 1 (que representa o jogo todo), no subjogo SJ 2 e no subjogo SJ 3, conclui-se que essa combinação de estratégias é um equilíbrio perfeito.

Uma vez que a combinação de estratégias (Investimento Baixo, (Não Remunera, Não Remunera)) demonstra ser um equilíbrio perfeito, a conclusão que resulta da análise do jogo da regulação é que, qualquer que seja a decisão de investimento da empresa de infraestrutura, sempre será melhor para o regulador estabelecer uma tarifa baixa que não remunere adequadamente os investimentos.

Em função disso, a opção da empresa de infraestrutura será sempre de investir um volume aquém do que seria necessário, em termos de quantidade de capital e de modernização dos equipamentos. O equilíbrio se dará então com uma tarifa inferior ao necessário para justificar os investimentos, quaisquer que sejam eles, e baixo investimento.

Esse resultado, que deve estar parecendo um tanto pessimista, é um dos principais resultados da teoria econômica, quando aplicada ao problema da regulação de serviços de infraestrutura: quando o agente regulador não possui autonomia e é vulnerável a pressões políticas, o resultado costuma ser ineficiente em todos os aspectos: a empresa não é remunerada adequadamente por seus investimentos, e a população não recebe serviços satisfatórios.

Esse resultado é conhecido, na literatura econômica voltada para a questão da regulação, como o problema do *compromisso* do regulador com sua promessa de garantir um retorno satisfatório sobre os investimentos privados, uma vez que o regulador ganha mais se não cumpre com sua promessa.

Assim, da mesma forma que podemos ter ameaças não-críveis, também podemos ter promessas não-críveis. **Tanto promessas quanto ameaças não-críveis envolvem combinações de estratégias que não são equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos**; isto é, caso a circunstância para essas estratégias serem jogadas se apresente, a efetivação dessas ameaças ou promessas não é a melhor resposta possível.

Pode parecer, portanto, que a menos que a ameaça ou a promessa seja naturalmente do interesse do jogador que as realiza, não há como os jogadores empregarem ameaças ou promessas a seu favor. Há, porém, uma possibilidade de alterar essa situação. Essa possibilidade depende dos jogadores adotarem o que se chama de *movimento estratégico*. Esse será nosso próximo tema.

TORNANDO AMEAÇAS E PROMESSAS CRÍVEIS: MOVIMENTOS ESTRATÉGICOS

Movimentos estratégicos são da maior importância em processos de interação estratégica. Abaixo apresentamos uma definição simples do que são *movimentos estratégicos*:

Movimentos estratégicos são ações adotadas pelos jogadores que visam a alterar alguma característica do jogo, em geral a ordem em que os jogadores jogam ou as recompensas dos jogadores.

Na prática, um movimento estratégico é uma ação adotada por um dos jogadores, que se move primeiro e que busca com esse primeiro movimento mudar o desenvolvimento do jogo a seu favor.

Essa mudança do desenvolvimento do jogo a seu favor pode se dar por uma alteração na ordem em que os jogadores inicialmente jogariam, ou por uma modificação nas recompensas dos jogadores, ou pelas duas coisas ao mesmo tempo. A ideia é que a mudança no desenvolvimento do jogo seja suficiente para tornar a ameaça ou a promessa críveis.

Vamos ilustrar o conceito de movimento estratégico com o caso de um movimento estratégico em que um dos jogadores altera, ao mesmo tempo, a ordem em que os jogadores jogam e suas recompensas. Vamos assim retornar ao jogo da entrada da Figura 6.1, mas dessa vez admitindo que a Dominante tem a possibilidade de investir em capacidade produtiva, que se constitui, em sua maior parte, de *ativos específicos*.

Ativos específicos são ativos produtivos (máquinas, equipamentos, instalações etc.) que não podem ser aplicados em outra atividade produtiva distinta daquela para a qual foram planejados, nem podem ser transportados para produzir em outra localidade. Uma tubulação subterrânea de gás encanado é um exemplo de um ativo específico: uma vez instalada ela não pode ser utilizada para outra finalidade além de distribuir gás, nem pode ser transportada para distribuir gás em outra localidade.[7]

Ocorre que quando uma parcela expressiva de capacidade produtiva é investida em ativos específicos, essa parcela do investimento se transforma em *custos irrecuperáveis*. É considerado um custo irrecuperável o valor do investimento em um ativo que a empresa não consegue recuperar se o ativo não for utilizado. Os ativos específicos são a fonte de custos irrecuperáveis, uma vez que possuem pouca ou nenhuma aplicação alternativa. Assim, caso o investimento seja malsucedido, seu valor de revenda costuma ser irrisório.[8]

Desse modo, se a empresa estabelecida no setor, no caso do exemplo do jogo da entrada, a empresa Dominante, investisse uma parcela significativa de sua capacidade em ativos específicos, ela não teria como reduzir sua capacidade instalada, na eventualidade de uma diminuição de suas vendas, exceto com um prejuízo elevado.

---

7 Como exemplo de ativo que não é específico, considere um caminhão de transporte geral.

8 Imagine uma empresa de distribuição de gás encanado que decidisse se retirar do seu setor. Sua rede subterrânea teria um valor muito baixo, caso a empresa pudesse se desfazer dela.

Isso porque, caso investisse em ativos específicos e a demanda para a capacidade produtiva desses ativos não acontecesse, a perda no valor do investimento nesses ativos caso a Dominante tivesse de vendê-los para eliminar capacidade ociosa seria muito elevada. Desse modo, ao investir uma parcela significativa de sua capacidade produtiva em ativos específicos, a empresa Dominante estaria optando por tornar sua capacidade produtiva *inflexível*.

Já caso a empresa Dominante optasse por investir uma parcela significativa de sua capacidade produtiva em ativos com pouca especificidade, se a demanda necessária para garantir a ocupação produtiva desses ativos não se realizasse, a empresa Dominante conseguiria reduzir a capacidade ociosa revendendo esses ativos, com pequena perda no seu valor, uma vez que os ativos em que investiu sua capacidade produtiva são ativos de uso geral. Nesse caso, dada a possibilidade de revenda dos ativos sem perdas significativas, a Dominante estaria optando por tornar sua capacidade produtiva *flexível*.

Modificamos o jogo da entrada para incorporar a possibilidade de a Dominante realizar esse movimento estratégico, de optar por uma capacidade produtiva flexível ou inflexível, *no início do jogo*, e o jogo da entrada foi renomeado como "jogo de prevenção de entrada", na Figura 6.9.[9]

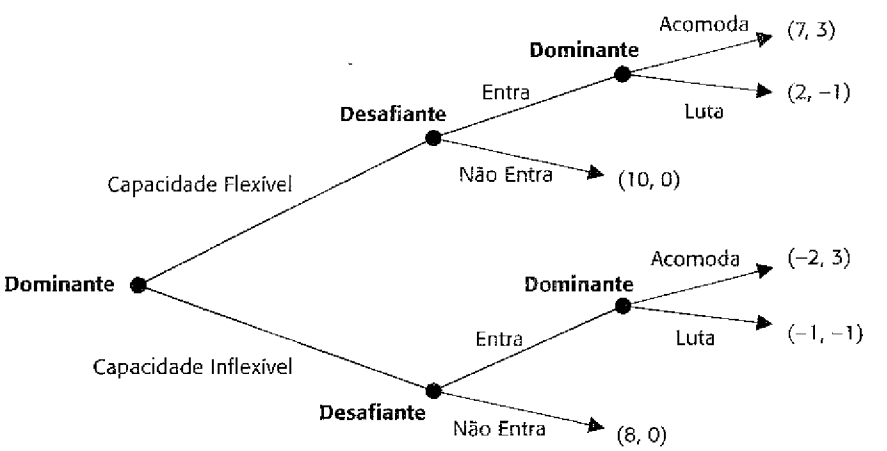


Figura 6.9 O Jogo da Prevenção da Entrada

No jogo de prevenção da entrada da Figura 6.9, as recompensas dos jogadores, caso a empresa Dominante escolha uma capacidade produtiva flexível, são

9 O leitor deve atentar para o fato de que, no jogo de prevenção da entrada da Figura 6.9, a primeira recompensa corresponde à recompensa da empresa Dominante e a segunda recompensa à empresa Desafiante, ao contrário do que acontecia com o jogo da entrada da Figura 6.1. A razão disso é que agora é a empresa Dominante quem faz o primeiro movimento, ao decidir se adota a capacidade flexível ou inflexível.

as mesmas do jogo da entrada. As recompensas da Desafiante também não se alteram, mesmo que a Dominante escolha capacidade produtiva inflexível, fundada basicamente em ativos específicos, fonte de custos irrecuperáveis, ou seja, ativos que produzem perdas significativas se tiverem de ser alienados para ajustar a capacidade a uma insuficiência de demanda.

Além da ordem em que os jogadores jogam (agora a Dominante é a primeira a jogar, escolhendo capacidade flexível ou inflexível), a única alteração no jogo da prevenção de entrada diz respeito *às recompensas da Dominante caso ela escolha a capacidade produtiva inflexível*. Há dois motivos para isso. O primeiro deles é que ativos especializados são, em geral, mais caros do que ativos de uso geral. Assim, mesmo que a Desafiante não entre, os lucros da Dominante serão menores com capacidade inflexível do que com capacidade flexível (8 milhões contra 10 milhões de recompensa).

O segundo motivo para que haja diferenças nas recompensas da Dominante caso ela escolha capacidade inflexível é que nesse caso o prejuízo resultante de acomodar a entrada da Desafiante é maior do que o de lutar (–2 milhões acomodando contra –1 milhão lutando). Dada a especificidade dos ativos, a alternativa de aliená-los caso a demanda da Dominante se reduza não é mais viável: se há um custo de luta, há um custo ainda maior de acomodar a entrada do competidor.

Vamos então encontrar o equilíbrio perfeito do jogo da prevenção da entrada na Figura 6.9, empregando o método da indução reversa (no exercício 6.3 o leitor é convidado a conferir o resultado que será obtido da aplicação do método da indução reversa, identificando a estratégia que constitui um equilíbrio de Nash perfeito em todos os subjogos).

Antes disso, porém, precisamos considerar como serão representadas as estratégias dos jogadores do jogo da prevenção da entrada: a Dominante e a Desafiante. Vejamos inicialmente as estratégias da empresa Dominante. Qualquer estratégia da Dominante terá de especificar três ações: uma ação no primeiro movimento da empresa Dominante, definindo se adota uma capacidade produtiva flexível ou inflexível.

A seguir, a estratégia da empresa Dominante deve especificar qual ação ela deve tomar se a Desafiante decidir entrar e *caso a Dominante tenha escolhido capacidade produtiva flexível*. Por último, a estratégia da Dominante deve especificar a ação a ser tomada se a Desafiante decidir entrar e *caso a Dominante tenha escolhido capacidade produtiva inflexível*.

Desse modo, um exemplo de estratégia para a Dominante seria {(Capacidade Flexível, Acomoda, Luta)}, significando que a Dominante escolhe adotar uma capacidade produtiva flexível em seu primeiro movimento, a

partir daí acomodando se a Desafiante decide entrar após a Dominante ter escolhido adotar capacidade produtiva flexível; e lutando se a Desafiante decidir entrar após a Dominante ter decidido adotar uma capacidade produtiva inflexível.

Pode parecer estranho que haja em uma mesma estratégia, em que consta como primeira escolha da Dominante adotar capacidade produtiva *flexível*, a ação que a Dominante deveria escolher no caso de a Desafiante decidir entrar com a Dominante tendo escolhido uma estratégia *inflexível*. Isso porque, obviamente, caso a Dominante tenha decidido adotar uma capacidade produtiva flexível, a circunstância em que a Dominante teria de decidir se acomoda ou luta, dada a entrada da Desafiante, e tendo a Dominante escolhido a capacidade inflexível, nunca irá ocorrer no jogo.

Como vimos no Capítulo 2, isso se justifica porque uma estratégia deve especificar tudo que um jogador deve fazer, em cada momento em que o jogador tenha de tomar uma decisão no jogo. Daí o fato de que, apesar de a especificação do tipo de capacidade produtiva no primeiro movimento da Dominante impedir que uma de suas próprias ações seja jogada em uma etapa seguinte do jogo, essa ação tem de constar na caracterização da estratégia.

Retornando ao jogo da prevenção da entrada da Figura 6.9, temos, portanto, que há nada menos do que oito estratégias resultantes de todas as sequências de ações que podem ser adotadas pela Dominante: {(Capacidade Flexível, Acomoda, Acomoda), (Capacidade Flexível, Acomoda, Luta), ..., (Capacidade Inflexível, Acomoda, Acomoda) etc.}. Como exercício, sugerimos ao leitor listar todas as oito estratégias.

Aplicando um raciocínio análogo à Desafiante, identificamos quatro estratégias com base no fato de que a Desafiante tem de tomar sua decisão quanto a entrar ou não entrar em duas etapas diferentes do jogo: uma que se segue à Dominante ter escolhido capacidade flexível e outra que se segue à Dominante ter escolhido capacidade inflexível.

Assim, se considerarmos que, na descrição de uma estratégia da Desafiante, a primeira ação corresponde sempre à escolha da Desafiante na circunstância de a Dominante ter escolhido uma capacidade flexível, e a segunda ação corresponde sempre à escolha no caso de a Dominante ter escolhido uma capacidade inflexível, teremos as quatro estratégias: {(Entra, Entra), (Entra, Não Entra), (Não Entra, Entra) e (Não Entra, Não Entra)}.

Vamos resolver então o jogo da prevenção da entrada da Figura 6.9 por indução reversa, e identificar entre essas várias estratégias qual delas é o equilíbrio perfeito. Primeiramente, eliminaremos os ramos que correspondem às decisões que não são ótimas, nas etapas em que a Dominante tem de decidir se

acomoda ou se luta, caso a Desafiante tenha decidido entrar. Para isso, considere a Figura 6.10 (a):

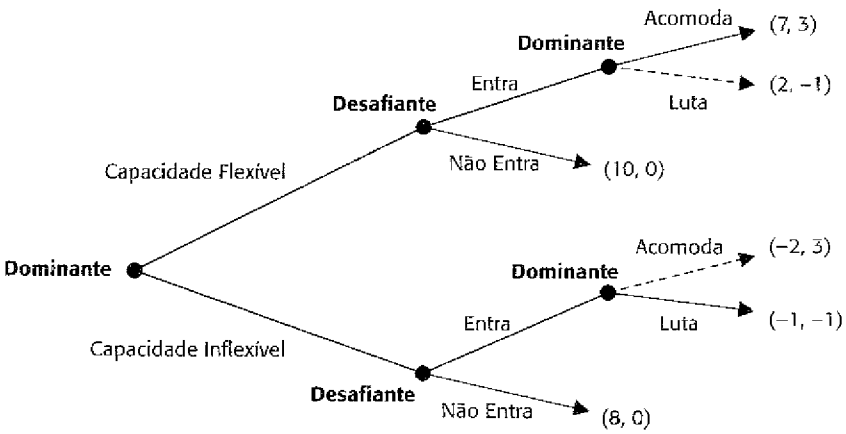


Figura 6.10 (a) Aplicando Indução Reversa ao Jogo de Prevenção da Entrada

Na Figura 6.10 eliminamos o ramo que corresponde à decisão da Dominante de lutar, caso a Desafiante tenha decidido entrar após a própria Dominante ter escolhido uma capacidade de produção flexível, juntamente com o ramo que corresponde à decisão da Dominante de acomodar, caso a Desafiante tenha decidido entrar após a própria Dominante ter escolhido uma capacidade de produção inflexível.

Isso significa que a estratégia da Dominante que irá compor o equilíbrio perfeito deverá conter as ações que não foram eliminadas naquelas duas etapas do jogo, determinando que a Dominante acomode, caso a Desafiante tenha decidido entrar após a própria Dominante ter escolhido uma capacidade de produção flexível; e que a Dominante lute, caso a Desafiante tenha decidido entrar após a própria Dominante ter escolhido uma capacidade de produção inflexível.

A forma reduzida do jogo após essa primeira rodada da aplicação do método da indução reversa pode ser vista na Figura 6.10 (b).

A próxima etapa consiste em eliminar as piores opções da Desafiante nas duas circunstâncias em que ela tem de escolher se entra ou não entra, ou seja, após a escolha da Dominante quanto ao gênero de capacidade que ela deverá adotar, se flexível ou inflexível. Assim, na Figura 6.10 (c) mais adiante, eliminamos as piores escolhas da Desafiante, tanto para o caso em que a Dominante escolhe uma capacidade de produção flexível, quanto para o caso de a Dominante escolher uma capacidade de produção inflexível.

Podemos observar na Figura 6.10 (c) que a pior opção para a Desafiante, caso a Dominante escolha uma capacidade de produção flexível, consiste em a

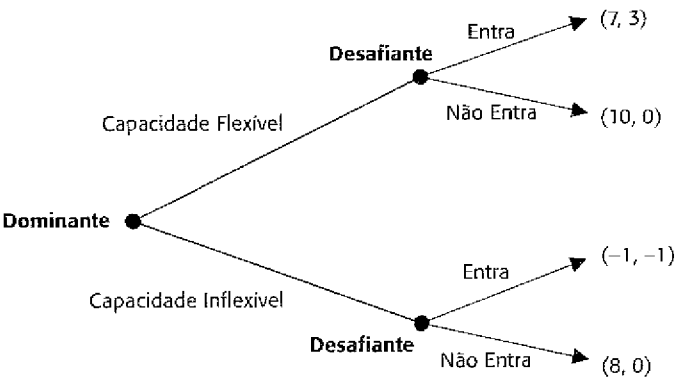


Figura 6.10 (b) Aplicando Indução Reversa ao Jogo de Prevenção da Entrada

Desafiante escolher não entrar. Isso ocorre porque, conforme vimos na rodada anterior de aplicação do método da indução reversa, a Dominante não irá lutar caso adote capacidade flexível, o que torna a entrada da Desafiante lucrativa.

Essa opção foi, portanto, eliminada, juntamente com a opção de a Desafiante entrar caso a Dominante escolha capacidade inflexível, pois, conforme vimos na rodada anterior de aplicação do método da indução reversa, a Dominante irá lutar caso adote capacidade inflexível, o que resulta em prejuízo da Desafiante caso ela decida entrar no mercado.

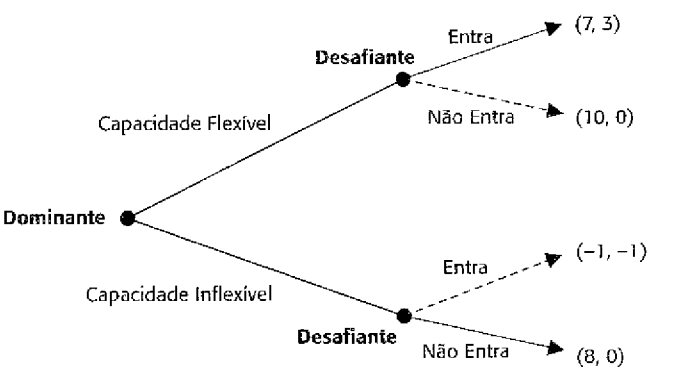


Figura 6.10 (c) Aplicando Indução Reversa ao Jogo de Prevenção da Entrada

Isso significa que a estratégia da Desafiante que irá compor o equilíbrio perfeito deverá conter as ações que não foram eliminadas nessas duas etapas do jogo, determinando que a Desafiante entre caso a Dominante tenha escolhido uma capacidade de produção flexível, e que a Desafiante não entre caso a Dominante tenha escolhido uma capacidade de produção inflexível. Isso determina que a estratégia da Desafiante que fará parte do equilíbrio perfeito será: {(Entra, Não Entra)}.

A forma reduzida do jogo após essa rodada da aplicação do método da indução reversa pode ser vista na Figura 6.10 (d):

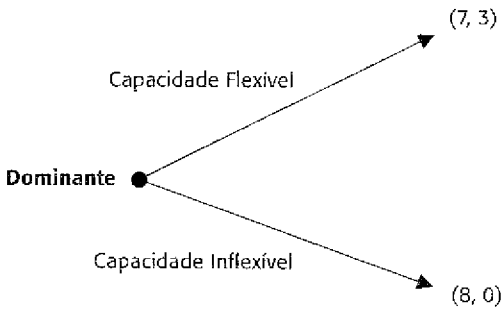


Figura 6.10 (d) Aplicando Indução Reversa ao Jogo de Prevenção da Entrada

É fácil observar na Figura 6.10 que a melhor opção para a Dominante, considerado todo o desdobramento que se segue no jogo, é escolher uma capacidade de produção inflexível, e assim assegurar a maior recompensa (de 8 milhões). Dessa forma completamos a estratégia da Dominante que fará parte do equilíbrio perfeito no jogo de prevenção de entrada: {Capacidade Inflexível, Acomoda, Luta}. Juntamente com a estratégia da Desafiante, {Entra, Não Entra}, isso resultará no equilíbrio perfeito: ((Capacidade Inflexível, Acomoda, Luta), (Entra, Não Entra)).

Em outras palavras, a Dominante escolhe uma capacidade inflexível e, com isso, lutar no caso de entrada da Desafiante se torna mais interessante do que acomodar. Por esse motivo, a Desafiante não entra. Com seu primeiro movimento, um *movimento estratégico*, ao escolher ativos específicos que geram custos irrecuperáveis e tornam a capacidade produtiva inflexível, a Dominante alterou o desenrolar do jogo, impedindo a entrada da Desafiante.

É importante notar que esse movimento estratégico melhorou a situação da Dominante no equilíbrio perfeito do jogo da prevenção de entrada em comparação com o jogo da entrada da Figura 6.1, *mesmo envolvendo um custo*. Isso porque vale a pena, para a empresa Dominante, incorrer no custo extra dos ativos específicos (o custo extra pode ser verificado pelo fato de que seus lucros se reduzem de 10 milhões para 8 milhões, no caso de a Desafiante não entrar).

A explicação para isso é que, incorrendo no custo extra dos ativos específicos, a Dominante efetivamente impede que a Desafiante entre. Com isso, mesmo reduzindo seus ganhos potenciais de 10 milhões para 8 milhões, ela ainda obtém um ganho maior do que se não incorresse no custo do investimento em capacidade com ativos específicos, pois nesse caso a entrada da Desafiante seria inevitável e seus lucros se reduziriam para 7 milhões!

Assim, o custo do movimento estratégico para impedir a entrada da Desafiante vale a pena. Contudo, antes de realizar um movimento estratégico para tornar uma ameaça ou uma promessa críveis, é importante avaliar se o custo é compensado pelo objetivo que se pretende alcançar.

Além de ameaças, também promessas podem ser tornadas críveis por movimentos estratégicos. No caso da promessa não-crível do nosso hipotético regulador, o governo poderia assinar um acordo com uma organização multilateral de financiamento de infraestrutura, de tal forma que os custos por adotar uma tarifa inadequada para remunerar os investimentos seriam maiores do que o custo em perdas de votos.

Essa estratégia de compromisso prévio é semelhante à estratégia adotada por Ulisses na *Odisseia*, de Homero: sabendo que passaria perto da ilha das sereias, e que não seria capaz de manter sua promessa de resistir ao seu canto, Ulisses pede a seus homens que o amarrem no mastro do navio.

De qualquer forma, tratando-se de ameaças ou promessas que se deseje tornar críveis, duas condições são necessárias para que um movimento estratégico seja bem-sucedido (além, é claro, do seu custo ser compensado pelo ganho que se espera obter). A primeira condição é a de que **o movimento estratégico possa ser observado pelos demais jogadores.**

Por exemplo, a empresa Desafiante somente desistiu de entrar no mercado da Dominante porque, de alguma forma, ficou sabendo que a Dominante tinha investido em ativos específicos. Se a Desafiante não soubesse, de nada adiantaria o custo extra de investir em ativos específicos, pois a Desafiante entraria no mercado de qualquer forma.

Também de nada adiantaria o governo assinar um acordo com uma organização multilateral de financiamento de infraestrutura, como mencionamos anteriormente, se a empresa de infraestrutura não souber que o acordo impõe penalidades caso o regulador estabeleça tarifas que não remunerem o investimento. O governo incorreria nesse custo, mas a empresa continuaria investindo pouco.

A segunda condição é a de que **o movimento estratégico seja irreversível.** Essa é exatamente a ideia que está por trás da atitude da Dominante de investir em capacidade excessiva com ativos específicos: a dificuldade de aliená-los torna a decisão de ampliar a capacidade praticamente irreversível, o que faz com que a ameaça de luta em caso de entrada se torne uma hipótese a ser levada a sério.

Da mesma forma, o acordo do governo com uma organização multilateral de financiamento de infraestrutura somente torna a promessa de tarifas adequadas crível se o acordo não puder ser desfeito a baixo custo pelas partes envolvidas. Ou seja, se ele for, em grande medida, de difícil reversibilidade.

JOGOS SEQUENCIAIS DE ESTRATÉGIAS CONTÍNUAS

No Capítulo 4, vimos algumas aplicações de jogos simultâneos que utilizam estratégias contínuas: o modelo de Cournot, o modelo de Bertrand, o jogo da localização etc. Veremos agora modelos de jogos sequenciais que utilizam estratégias contínuas na determinação de quantidades e preços em oligopólio: o modelo de liderança de quantidades (também conhecido como modelo de Stackelberg) e o modelo de liderança de preços.

O Modelo de Liderança de Quantidades (Stackelberg)

O modelo de liderança de quantidades, também conhecido como modelo de Stackelberg, em homenagem a seu formulador, Heinrich von Stackelberg (1905-1946), é um dos modelos clássicos de oligopólio. Nele temos duas empresas decidindo que quantidades produzir, mas, diferentemente do modelo de Cournot, agora uma das empresas (no nosso caso, a empresa 1) decide *antes* da outra quanto irá produzir.

Em função disso, a empresa que decide primeiro, ou empresa *líder*, sabe que a outra empresa, a empresa *seguidora* (empresa 2), vai se ajustar à sua escolha. Consequentemente, a empresa líder escolhe uma quantidade tal que induza a empresa seguidora a produzir uma quantidade adequada à maximização dos lucros da líder.

Assim como fizemos no modelo de Cournot do Capítulo 4, vamos iniciar a função de recompensa pela receita de cada empresa. A receita de cada empresa é o produto do preço de mercado pela quantidade vendida por cada empresa. Para simplificar, vamos supor que o preço de mercado é dado por uma função de demanda linear, do tipo:

$$p(q) = A - b(q_1 + q_2)$$

Onde, como sempre, $p(q)$ é o preço de mercado como função da quantidade, q é a quantidade total produzida e vendida no mercado, A e b são constantes, q_1 é a quantidade produzida e vendida pela empresa 1, e q_2 é a quantidade produzida e vendida pela empresa 2, com $q = q_1 + q_2$.

A receita total de uma empresa é o produto do preço de mercado pela quantidade produzida e vendida pela empresa. Segue-se então que as receitas totais da empresa 1 (líder), RT_1, e da empresa 2 (seguidora), RT_2, são dadas, respectivamente, por:

$$RT_1 = p(q)q_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2$$
$$RT_2 = p(q)q_2 = Aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2$$

Para chegarmos à função de recompensa de cada empresa temos de subtrair das receitas os custos. Vamos supor, também para simplificar, que a função-custo das duas empresas (C_1 e C_2) é idêntica, e dada por:

$$C_1 = cq_1$$
$$C_2 = cq_2$$

Onde c é uma constante estritamente maior que zero. Embora não seja necessário, estamos novamente supondo, como fizemos no modelo de Cournot, que as empresas possuem os mesmos custos, de forma a compararmos os dois modelos.

Vejamos o que se passa com a empresa seguidora, a empresa 2. Como ela decide que quantidade produzir *depois* da empresa líder, ela se comporta exatamente como no modelo de Cournot, tomando a quantidade da empresa líder como dada. Segue-se então que iremos construir a função de reação da empresa seguidora exatamente como fizemos no modelo de Cournot.

Primeiro construímos sua função de lucro total:

$$\pi_2 = Aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2 - cq_2$$

O passo seguinte é tomar a primeira derivada da equação anterior e igualar a zero, de acordo com a condição de primeira ordem para maximização:[10]

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = A - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$$

Colocando q_2 em evidência em $\partial\pi_2/\partial q_2$, temos então a função de reação da empresa 2, a empresa seguidora:

$$q_2 = \frac{A - bq_1 - c}{2b}$$

O que ocorre agora é que, ao contrário da empresa seguidora, a empresa líder (empresa 1) considera a *função de reação da empresa seguidora ao decidir quanto ela irá produzir*. Assim, seja a função lucro da empresa líder:

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$$

10 Como fizemos ao discutir o modelo de Cournot, admitimos que a condição de segunda ordem para um máximo é satisfeita, sem examiná-la. O leitor curioso naquela oportunidade como agora pode testar se isso é verdade para esse caso.

Substituímos q_2 pela função de reação da empresa seguidora, calculada anteriormente:

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1\left(\frac{A - bq_1 - c}{2b}\right) - cq_1$$

Agora, tomemos a primeira derivada dessa expressão, e igualemos a zero (condição de primeira ordem de maximização). Após algumas simplificações, obtemos que a quantidade de equilíbrio da empresa líder, q_1^e, é dada por:

$$q_1^e = \frac{A - c}{2b}$$

Consequentemente, substituindo a quantidade de equilíbrio da empresa líder na função de reação da empresa seguidora, tem-se que a quantidade de equilíbrio da empresa seguidora é dada por:

$$q_2^e = \frac{A - c}{4b}$$

É interessante comparar os resultados obtidos com o modelo de Cournot estudado no Capítulo 4. Sugerimos que o leitor se certifique, por si mesmo, de que enquanto os lucros da empresa líder são maiores, na solução de Stackelberg, do que os lucros de qualquer uma das empresas no modelo de Cournot com duas empresas, a empresa seguidora no modelo de liderança de quantidades está em uma situação pior do que qualquer uma das duas empresas do modelo de Cournot do Capítulo 4.

Na solução do modelo de Stackelberg, ou de liderança de quantidades, nada mais fizemos do que aplicar o princípio da indução reversa: a empresa líder antecipa a função de reação da seguidora, que seria a etapa seguinte do jogo, ao tomar sua própria decisão no início do jogo. Podemos aplicar o mesmo raciocínio para o caso de uma empresa que seja líder na fixação de preços, em vez de quantidades. Esse será nosso próximo assunto.

O Modelo de Liderança de Preços: Um Caso de Conluio Tácito

Vimos como o método da indução reversa pode ser empregado no modelo de liderança de quantidades ou de Stackelberg. Assim como uma empresa dominante (controlando grande parcela de um mercado) pode assumir a liderança na definição das quantidades a serem produzidas em um oligopólio (por exemplo, por meio de seus planos de expansão, uma empresa líder pode definir a parcela de

mercado que lhe cabe e quanto restará para seus concorrentes), uma empresa dominante também pode assumir a liderança na determinação do *preço* que irá vigorar no mercado.

Nesse caso, as empresas menores agem como se fossem tomadoras de preços, seguindo a líder. Na literatura de defesa da concorrência esse comportamento é um dos tipos de *conluio tácito*, isto é, de *cartel*, em que as empresas não precisam se comunicar para estabelecer o preço que irá vigorar no mercado: a líder define o preço e as pequenas empresas apenas seguem. Um exercício ilustrativo vai nos ajudar a entender como isso se dá.

Eis um modelo desse tipo de caso, de empresa dominante como líder de mercado. Vamos supor que a empresa dominante conhece os custos das empresas menores, de tal forma que consegue estimar a quantidade que as empresas menores irão ofertar, dado o preço de mercado. Chamemos a essa curva de oferta das empresas menores de S_2.

Seja, então, S_2 dada por:

$$S_2 = 4p$$

Onde p é o preço de mercado. A empresa dominante conhece a demanda total do mercado (D):

$$D = 100 - p$$

Assim, a empresa dominante obtém a curva de demanda pelo seu produto, S_1, como um resíduo, resultante da diferença entre a demanda total a um dado preço e a oferta das pequenas empresas a esse mesmo preço, de acordo com a expressão a seguir:

$$S_1 = D - S_2 = 100 - p - 4p = 100 - 5p$$

Resolvendo a equação acima para p, obtemos a seguinte expressão:

$$p = \frac{100 - S_1}{5}$$

Vamos supor que a função custo total da empresa dominante seja dada por:

$$C_1 = 2S_1$$

Os lucros (π), a serem maximizados pela empresa dominante, são dados então por:

$$\pi = pS_1 - 2S_1 \text{ ou: } \pi = \left(\frac{100 - S_1}{5}\right) S_1 - 2S_1$$

Na equação anterior nada mais fizemos do que substituir p por $\frac{100 - S_1}{5}$, na função lucro π da empresa dominante. Derivando $\pi = \left(\frac{100 - S_1}{5}\right) S_1 - 2S_1$ e igualando a zero (condição de primeira ordem de maximização), chegamos à quantidade produzida da empresa dominante que maximiza o seu lucro, S_1^*:

$$\frac{100 - 2S_1}{5} - 2 = 0 \therefore S_1 = \frac{90}{2} = 45$$

Fazendo as substituições necessárias, o leitor poderá constatar que o preço de equilíbrio será:

$$p = \frac{100 - 45}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

E a quantidade produzida pelas empresas menores será:

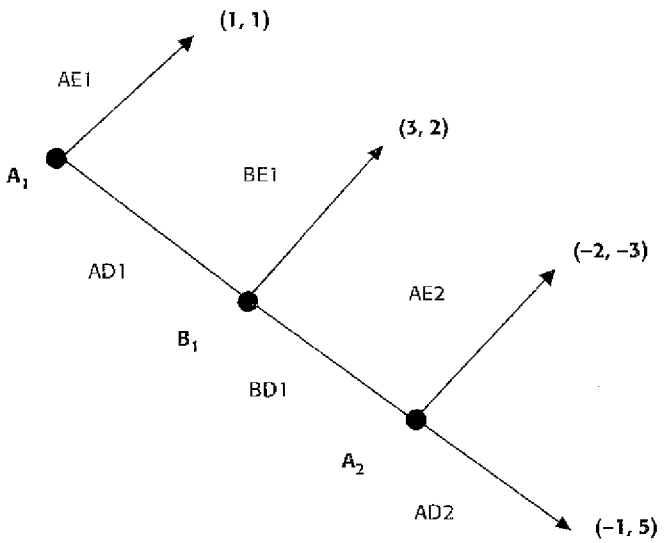
$$S_2^* = 4p = 4 \times 11 = 44$$

Esse exemplo numérico nos ajuda a entender a atuação da empresa dominante como empresa líder. Ao subtrair da demanda total a oferta das empresas menores, ela determina por meio da sua produção, o preço de mercado que irá maximizar seus lucros, dada a reação das empresas menores a esse preço.

É, portanto, porque antecipa a reação das empresas menores ao preço que irá fixar ao determinar sua quantidade, que a empresa dominante maximiza seus lucros. Como no modelo de Stackelberg, o que temos aqui é uma empresa dominante utilizando a vantagem de ser a primeira a se mover em um jogo sequencial.

EXERCÍCIOS

6.1 Considere o jogo a seguir:



Nele, temos dois jogadores, A e B. O jogador A tem quatro possibilidades de ação: AE1 e AD1 quando em A_1, AE2 e AD2 quando em A_2. O jogador B tem duas possibilidades de ação: BE1 e BD1 se o jogo alcança B_1. Pede-se:

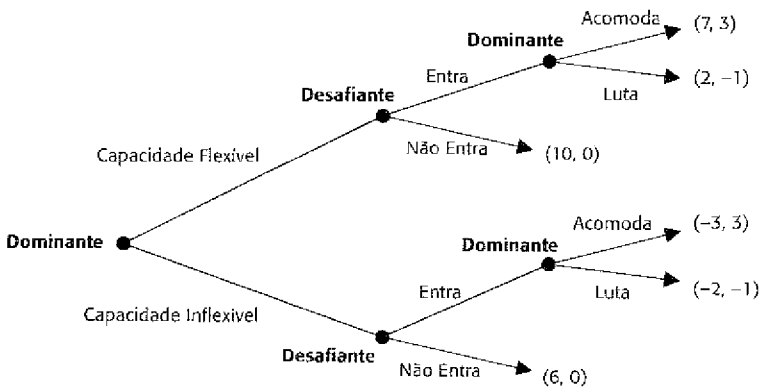
a. Identificar todos os equilíbrios de Nash que porventura existam.
b. Identificar os subjogos presentes no jogo.
c. Identificar que combinação de estratégias constitui equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.
d. Encontrar a solução do jogo aplicando indução reversa.
e. Verificar se a solução do jogo encontrada em (c) é ótimo de Pareto.

6.2 Encontre a solução do jogo da regulação da Figura 6.6, usando o método da indução reversa.

6.3 Encontre a solução do jogo da prevenção da entrada da Figura 6.9 identificando qual ou quais combinações de estratégias são equilíbrios de Nash em todos os subjogos daquele jogo.

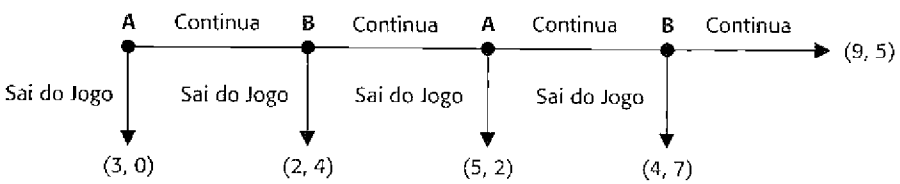
6.4 Suponha que o governo, no jogo da regulação da Figura 6.6, tenha decidido estabelecer uma corte independente, com capacidade para julgar e punir atos arbitrários do regulador em relação à fixação de tarifas abaixo do necessário para remunerar os investimentos realizados. Suponha que isso equivalha a subtrair 0,5 das recompensas do regulador sempre que ele fixar tarifas muito baixas. Verifique por indução reversa se isso é suficiente para induzir um novo equilíbrio perfeito com investimento elevado e tarifas justas.

6.5 Considere que o custo do investimento dos ativos específicos seja tal que agora as recompensas do jogo da prevenção da entrada da Figura 6.9 sejam dadas por:



Verifique se, nesse caso, o movimento estratégico da Dominante ainda gera um equilíbrio perfeito diferente do jogo da entrada da Figura 6.1.

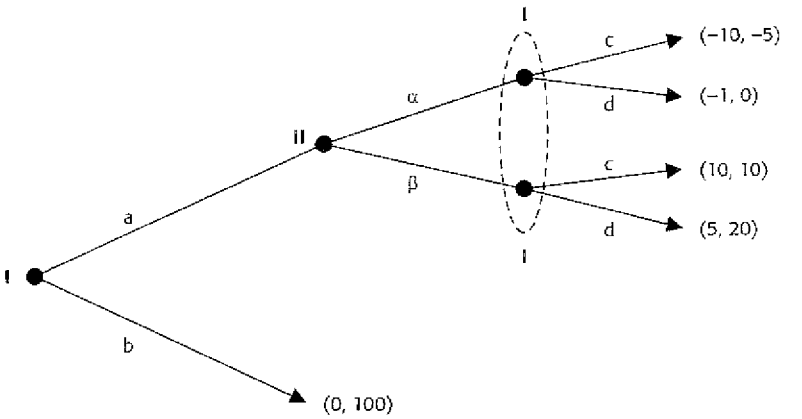
6.6 Um jogo bastante famoso em teoria dos jogos é o **jogo da centopéia**, batizado assim pelo seu formato, que lembra o de uma centopeia. Nesse tipo de jogo, cada jogador tem sempre as mesmas duas ações possíveis: continuar no jogo, passando a vez para o outro jogador, ou sair do jogo. Considere um caso desse tipo de jogo, na figura a seguir:



Na figura anterior temos dois jogadores, A e B. As recompensas dos dois jogadores para cada combinação de estratégias se encontram assinaladas na figura. Pede-se então:

a. Representar esse jogo na forma estratégica.
b. Encontrar a solução do jogo por indução reversa.
c. Confirmar a solução do jogo por indução reversa, determinando o equilíbrio perfeito desse jogo.
d. Justificar por que considera-se que esse jogo apresenta um resultado paradoxal, uma vez que, se os jogadores forem racionais, o jogo nunca é jogado.

6.7 Algumas vezes os jogos sequenciais podem envolver etapas em que os jogadores tomam suas decisões sem conhecer as decisões dos demais jogadores. Nesses casos, os jogadores enfrentam nesse tipo de etapa uma situação igual à que enfrentam em um jogo simultâneo. Considere assim o jogo a seguir:



Nesse jogo há dois jogadores, denominados simbolicamente I e II. I possui duas ações possíveis no início do jogo: "a" e "b", e duas ações possíveis na terceira e última etapa do jogo, quando I não sabe o que II decidiu: "c" e "d". II possui duas ações possíveis na segunda etapa do jogo, exatamente as ações que I não pode observar: "α" e "β". As recompensas de cada jogador estao indicadas nos nós terminais. Pede-se:

a. Representar o jogo na forma estratégica.
b. Identificar os subjogos do jogo.
c. Encontrar o equilíbrio perfeito (sugestão: determine o equilíbrio de Nash no subjogo em que há um conjunto de informação que não é unitário tratando esse subjogo como um jogo simultâneo).

6.8 Calcule o equilíbrio de Stackelberg para duas empresas, Empresa 1 e Empresa 2, das quais a Empresa 1 é a líder, em um mercado em que a função de demanda é dada por:

$$p = 1.000 - 0{,}5(q_1 + q_2)$$

E as funções de custo das duas empresas são dadas por:

$$C_1 = 2q_1$$
$$C_2 = 2q_2$$

6.9 Compare preço de equilíbrio, quantidade total produzida, quantidade produzida por cada empresa e lucro de cada empresa do exercício 6.8 com o exercício 4.1 do Capítulo 4.

6.10 Seja um mercado em que uma empresa, a Empresa 1, é líder de preços. Chamemos a curva de oferta das empresas menores de S_2. Seja, então, S_2 dada por: $S_2 = 2p$, onde p é o preço de mercado. A Empresa 1, empresa dominante, conhece a demanda total do mercado (D): $D = 100 - p$. Vamos supor que a função custo total da empresa dominante seja dada por: $C_1 = S_1$. Analise o equilíbrio desse mercado.

7

Jogos Repetidos: Induzindo a Cooperação

Toda espécie de cooperação pacífica entre os homens se baseia, em primeiro lugar, na confiança mútua e apenas em segundo lugar em instituições tais como cortes de justiça e polícia.

ALBERT EINSTEIN, FÍSICO ALEMÃO NATURALIZADO NORTE-AMERICANO (1879-1955)

INTRODUÇÃO

Os processos de interação estratégica nos quais os jogadores decidem sem conhecer as decisões dos demais podem ser tratados como jogos simultâneos. Já os processos de interação estratégica em que os jogadores decidem em uma ordem predeterminada e conhecem o que foi decidido na etapa anterior, podem ser analisados como jogos sequenciais. Vamos tratar agora de um outro tipo de processo de interação estratégica, que também demanda um modelo de jogo peculiar. Vamos tratar dos processos de interação estratégica que possuem uma *história*.

Existem processos de interação estratégica que se desenrolam no tempo e, desse modo, possuem uma história que é de conhecimento comum dos jogadores. Pense, por exemplo, em uma relação comercial entre duas empresas, em que uma das empresas adquire um insumo específico da outra empresa, ou seja, uma matéria-prima que tem de ser entregue com determinadas características físicas e em um dado prazo, para não prejudicar o processo produtivo da empresa compradora.

Ao mesmo tempo, para oferecer esse insumo, a empresa produtora tem de realizar certos investimentos em volume significativo, os quais somente atendem às necessidades da empresa compradora, e que deixam de certa forma a empresa produtora na dependência de que sua cliente cumpra as condições contratuais do fornecimento do insumo, realizando os pagamentos acertados contratualmente, para que a empresa produtora não tenha prejuízos.

Ainda que a empresa compradora não possa ter certeza acerca do comportamento da empresa fornecedora do insumo na etapa atual da transação, ela pode observar a história da relação comercial com a empresa fornecedora, no momento de encomendar uma nova entrega do insumo específico.

O mesmo pode ser feito pela empresa produtora quanto ao comportamento de sua cliente ao honrar os compromissos anteriores. Por sinal, essa é uma prática bastante comum no mundo dos negócios: observa-se a história do comportamento dos parceiros, ao se avaliar a conveniência de prosseguir com a relação.

Também entre políticos, especialmente entre congressistas que devem realizar, com frequência, acordos para que suas plataformas políticas se transformem efetivamente em leis, a consideração da história dos acordos que são fechados e da forma com que esses acordos são ou não respeitados, serve como indicador claro acerca de quais congressistas são "confiáveis" na hora de se fechar um acordo, e quais não são.

Um aspecto importante é que esses processos envolvem **etapas que se repetem**, sendo que, muitas vezes, essas etapas podem ser de tal natureza que se justifique sua modelagem como *jogos simultâneos*. Por exemplo, na relação comercial entre as duas empresas que mencionamos no início, embora haja um histórico de relação entre elas, cada vez que a empresa compradora do insumo específico adquire o produto, ela não sabe se a fornecedora decidiu produzir o insumo com a qualidade e rapidez necessárias.

Da mesma forma, a empresa que fornece o insumo tem de tomar sua decisão quanto a contratar uma nova entrega e realizar os investimentos específicos necessários sem saber se sua cliente, também dessa vez, terá escolhido honrar seus compromissos ou não.

Desse modo, pode acontecer que, embora os jogadores conheçam as decisões que foram tomadas em etapas anteriores, a cada nova etapa em que são chamados a decidir, eles o façam sem saber o que os demais jogadores estão decidindo *naquela etapa*.[1]

Quando estamos nos defrontando com esse tipo de situação, um tipo particular de modelagem em jogos, conhecido como *modelos de jogos repetidos*, pode ser útil para analisar esse gênero de interação estratégica. Esse tipo de jogo possui grande interesse sempre que se discute como induzir à cooperação, quando os jogadores possuem ganhos significativos ao agir de forma não-cooperativa em cada etapa do processo de interação estratégica.

---

1 A hipótese de que, em cada etapa do jogo, os jogadores não conhecem o que está sendo decidido pelos demais não é necessária aos jogos repetidos: como teremos a oportunidade de ver, ao discutirmos o paradoxo da cadeia de lojas, a etapa que se repete pode assumir a forma de um jogo sequencial.

Esse tipo de discussão é relevante nos casos em que não há uma instituição com poder coercitivo – tal como as cortes de justiça e a polícia a que Einstein se refere na epígrafe que encabeça este capítulo – que obrigue os jogadores a se comportarem cooperativamente. Em alguns exemplos mais dramáticos, pode ser até que a cooperação dos jogadores seja proibida legalmente, como é o caso dos *cartéis*.

Apesar de serem proibidos legalmente, infelizmente, cartéis existem. E existem, de forma ainda mais surpreendente, apesar dos ganhos de curto prazo por se descumprir o cartel serem significativos, o que torna o cartel instável, como veremos a seguir. Assim, a possibilidade de induzir cooperação apesar de ganhos de curto prazo pela não-cooperação é ilustrada de forma radical pelo caso dos cartéis, nosso próximo assunto.

APLICANDO JOGOS REPETIDOS A CARTÉIS

O leitor já deve ter ouvido falar no problema da "ética entre ladrões": uma situação em que se ganha agindo coordenadamente em grupo, mas se ganha ainda mais ao trapacear o grupo (por exemplo, escondendo uma parte do fruto do roubo conseguido em conjunto, para evitar que ele seja repartido entre todos).

O problema é que se todos raciocinam da mesma maneira, uma vez que é razoável esperar que isso aconteça – dada a hipótese geral de que todos são racionais, podem identificar e se aproveitar das possibilidades de ganho –, o nosso hipotético grupo de ladrões fracassará, pois todos tentarão esconder o fruto do roubo, e sem a divisão dos ganhos não há motivo para agir em grupo, ou seja, agir cooperativamente.

O problema de todo cartel é o mesmo problema da honra entre ladrões. Antes de entender em que sentido isso é verdade, precisamos conhecer melhor o que é um cartel. Assim, reproduzimos abaixo a definição que apresentamos no Capítulo 4:

Diz-se que empresas formaram uma *coalizão* quando elas coordenam suas quantidades produzidas ou seus preços. Um cartel é um grupo de empresas competidoras que fizeram uma coalizão, de forma a maximizar seus lucros se comportando como se fossem uma empresa monopolista.

Um cartel é, assim, um acordo entre empresas para reduzir a quantidade vendida e, com isso, elevar os preços até o nível de monopólio, ou um acordo para estabelecer diretamente esse preço de monopólio (caso se trate de um conluio explícito, isto é, de um conluio em que as empresas podem se comu-

nicar para estabelecer os preços ou as quantidades a serem produzidas por cada uma).

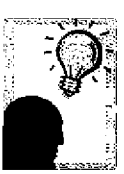
Algumas vezes, contudo, o cartel pode prescindir de um acordo explícito, estabelecendo o preço da indústria acima do nível competitivo, porém apenas próximo do nível de monopólio. Isso ocorre quando o cartel é o produto de um **conluio tácito**, isto é, o cartel surge em uma situação na qual as empresas não têm como se comunicar para definir as quantidades mais adequadas, mas, ainda assim, conseguem se coordenar, de forma a se aproximarem do preço de monopólio.

A coordenação para um cartel explícito não envolve maiores dificuldades:[2] basta reunir em uma sala os empresários interessados, ou estabelecer algum contato entre eles, por fax, telefone ou correio eletrônico, de modo a estabelecer quanto cada um deve produzir, para maximizar os lucros conjuntos, ou mesmo fixar diretamente o preço de monopólio para todos.

O caso do conluio tácito é um pouco mais complexo. A coordenação para um conluio tácito pode se dar, em primeiro lugar, pela ação de uma empresa que atue como líder na fixação de preços para todo o mercado. Tivemos a oportunidade de discutir os modelos de liderança de preços no capítulo anterior. Nesse caso, obviamente, a empresa líder tem de ser dominante, com parcela expressiva do mercado.

A empresa líder fixa então um preço que se torna referência para as demais empresas do mercado. Se a empresa líder fixar um preço suficientemente alto para garantir uma margem de lucro satisfatória às principais empresas no setor, é muito provável que as outras empresas apenas sigam o preço da líder, sem oferecer resistência. Aliás, sendo a líder uma empresa dominante no mercado, tentar estabelecer um preço menor do que o da líder pode envolver custos de luta significativos.

Outra possibilidade de conluio tácito é por tentativa e erro, por meio do recurso a um *ponto focal*. O conceito de ponto focal foi apresentado no Capítulo 3, e reproduzimos aqui novamente sua definição:



Um ponto focal é um elemento que se destaca de um contexto, e que permite aos jogadores coordenarem suas decisões em um dentre vários equilíbrios de Nash possíveis.

---

2 É preciso destacar que estamos discutindo aqui um cartel do ponto de vista analítico, e não ético. Isso não significa negar que cartéis sejam nocivos para o interesse público e, portanto, devam ser rejeitados do ponto de vista ético. Contudo, dado que se verifica empiricamente a existência de cartéis, cumpre entender por que eles ocorrem, quais as condições que os favorecem e como podemos preveni-los. E a teoria dos jogos pode ser muito útil para isso.

Desse modo, a ideia de **ponto focal** é a de que, em determinadas circunstâncias, um elemento que se destaca do contexto permite uma coordenação dos agentes, sem que haja a necessidade de comunicação.

Como um exemplo, suponha que em um determinado mercado existam apenas três empresas: a primeira vendendo seu produto por 2 reais, a segunda, por 1,95 real e a terceira, por 1,91 real. Suponha que qualquer um dos três preços seria lucrativo para todas as três empresas, caso fosse adotado como preço comum. Sem poder se comunicar, qual preço as empresas escolheriam?

Como apenas o preço cobrado pela primeira empresa é um número "redondo", ele se destaca entre os preços cobrados, constituindo um ponto focal. Desse modo, as empresas poderiam ir, aos poucos, convergindo para esse valor de 2 reais, que seria então o ponto focal do conluio tácito entre elas.

Obviamente, um conluio tácito é a opção mais viável se há uma legislação de defesa da concorrência em vigor, e se ela é aplicada com rigor. Contudo, apenas a título de exercício, vamos supor que há a possibilidade de as empresas se reunirem para fixar as quantidades que cada uma irá produzir, de forma a maximizar os lucros do cartel.

Isso nos permitirá concentrar nossa atenção nas dificuldades inerentes à sustentação do cartel, deixando de lado os problemas derivados da proibição legal. São essas dificuldades inerentes que podem ser mais bem entendidas por intermédio da teoria dos jogos. Da mesma forma, também será a teoria dos jogos que nos permitirá entender como essas dificuldades intrínsecas do cartel podem ser superadas em determinadas situações.

Vamos retornar então ao nosso exemplo do Capítulo 4, que é um exemplo conveniente, pois trata de um produto homogêneo. A teoria econômica nos diz que é sempre mais fácil formar um cartel no caso de um produto homogêneo do que no caso de um produto diferenciado.

A razão disso é simples: produtos homogêneos são produtos padronizados, cuja única variável relevante para os consumidores é o preço, uma vez que os produtos são iguais qualquer que seja o seu fabricante, enquanto produtos diferenciados são produtos que possuem uma diversidade de características, o que dificulta encontrar um preço comum para os diferentes fabricantes.

Imagine, para ilustrar o que estamos querendo dizer, um cartel em uma indústria de cimento. Cimento é um produto padronizado, objeto de normatização técnica, o que significa que as características do cimento não variam de acordo com o fabricante. Logo, a única variável que importa para quem adquire cimento é o preço. Sendo um produto homogêneo, as empresas de cimento podem fixar um único preço, o que simplifica bastante a tarefa do cartel, que é chegar a um acordo quanto ao preço a ser estabelecido.

Compare agora a situação hipotética anterior com um possível cartel na indústria automobilística. Nesse caso, os produtos se diferenciam quanto ao *design*, desempenho, economia, espaço interno, segurança ao dirigir etc. Isso obrigaria as empresas da indústria automobilística a estabelecer não um preço comum, pois os produtos são muito diferentes entre si, mas uma escala de preços comum, que identifique faixas de preço em comum para automóveis semelhantes. Desse modo, a tarefa de chegar a um acordo comum se torna muito mais árdua.

Retornando ao exemplo do Capítulo 4, suponhamos um mercado com duas empresas: a Empresa 1 e a Empresa 2, ambas produzindo cimento. Como cimento é um produto homogêneo, a única coisa com que as empresas têm de se preocupar, ao estabelecerem o cartel, é a quantidade que cada uma vai produzir para que o preço de mercado – que será o mesmo para ambas, dado que o produto é homogêneo – atinja o nível de monopólio.

Vimos, então, ao solucionar o problema da maximização de lucro do cartel no Capítulo 4, que cada empresa produziria 24 unidades caso formasse uma coalizão, isto é, um cartel. O preço de mercado no caso da coalizão entre as duas empresas seria então de 52 reais, e com isso o lucro de cada empresa no cartel seria de 1.152 reais.

A alternativa ao cartel seria cada empresa determinando sua quantidade a ser produzida independentemente das decisões da outra, o que corresponde ao modelo de Cournot. Nesse caso, vimos no Capítulo 4 que cada empresa produziria uma quantidade significativamente maior, 32 unidades. Com isso, o preço de mercado seria de 36 reais bem menor do que o preço de 52 reais no caso do cartel.

Finalmente, o lucro de cada empresa, no caso delas não formarem o cartel, seria de 1.024 reais, um valor inferior aos 1.152 reais que encontramos no caso delas decidirem formar um cartel. O cartel é, portanto, um bom negócio? Sem dúvida, mas o problema é que o negócio pode ser melhor ainda para a empresa que resolva *descumprir* o acordo.

Suponhamos que o executivo-chefe da Empresa 1 acredite que não existe honra entre ladrões e não reduza sua produção para o nível determinado pelo cartel, enquanto a Empresa 2 mantém sua parte no acordo e reduz sua produção. Vamos refazer as contas do Capítulo 4, para ver o que acontece se a Empresa 1 decidir descumprir o acordo, mantendo a mesma produção do equilíbrio de Cournot, que é o nível de produção se ela não estivesse no cartel.

Assim, a curva de demanda do mercado de cimento é dada por:

$$p = 100 - q_1 - q_2$$

Logo, se a Empresa 1 não reduz sua produção, enquanto a Empresa 2 o faz, o novo preço de mercado será de:

$$p = 100 - 24 - 32 = 44$$

Trata-se de um preço inferior ao preço do cartel, de 52 reais, mas ainda superior ao preço competitivo, de 36 reais. O lucro da Empresa 1, que não reduziu a sua produção, será assim de:

$$\pi_1 = (44 \times 32) - (4 \times 32) = 1.280$$

O lucro da Empresa 1, de 1.280 reais, é significativamente maior do que o lucro que a mesma empresa obteria se obedecesse ao cartel: 1.152 reais. Assim, é um bom negócio para a Empresa 1 quebrar o acordo. Mas e quanto à Empresa 2?

O lucro da Empresa 2, no caso de a Empresa 1 quebrar o acordo enquanto a Empresa 2 cumpre a sua parte, seria de:

$$\pi_2 = (44 \times 24) - (4 \times 24) = 960$$

O lucro da Empresa 2, desse modo, fica *abaixo* do lucro que essa mesma empresa obteria no modelo de Cournot, que é a situação competitiva de 1.024 reais. Desse modo, refazendo as contas, vê-se agora que a Empresa 1, que descumpre sua parte no trato, aumenta substancialmente seus lucros, à custa da empresa que mantém sua palavra no acordo. Por outro lado, a Empresa 2 está agora em uma situação *pior* do que se não tivesse tentado formar o cartel com a Empresa 1.

Da mesma forma que a Empresa 1, sendo racional, antecipa a oportunidade de ganhos, também a Empresa 2 poderia antecipar a mesma possibilidade. O resultado seria que as empresas não cumpririam o acordado, e o cartel não se sustentaria. Vamos chamar a estratégia de cumprir a recomendação do cartel de {Coopera}, significando que a empresa coopera com as demais empresas e respeita o acordo do cartel, e vamos chamar de {Não Coopera} a estratégia em que a empresa não cumpre o acordo do cartel.

Podemos então descrever essa situação de interação estratégica por meio da forma estratégica a seguir, na qual as recompensas de cada empresa são os lucros obtidos em cada situação:

	Empresa 2	
Empresa 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	1.152, 1.152	960, 1.280
Não Coopera	1.280, 960	1.024, 1.024

Figura 7.1 O Jogo do Cartel como Jogo Simultâneo

O leitor já deve ter percebido que, nesse jogo, há apenas um equilíbrio de Nash, e ele é dado pelas duas empresas não cooperando, o que gera os mesmos lucros do equilíbrio de Cournot. Para usar a terminologia que vimos no Capítulo 3, a estratégia {Não Coopera} é estritamente dominante: é sempre melhor não cooperar, não importa o que a outra empresa decida.

O leitor também deve ter notado que esse jogo nada mais é do que uma versão do *dilema dos prisioneiros*, que estudamos no Capítulo 3. Os jogadores se vêem presos a um equilíbrio subótimo, uma vez que os ganhos resultantes de desrespeitar o acordo são suficientemente tentadores para impedir que os agentes cooperem entre si e atinjam uma posição que represente uma melhoria no sentido de Pareto.

Contudo, essa modelagem do processo de interação entre as empresas sofre de uma grave limitação, que tem de ser reconhecida: não é razoável que a interação entre empresas que convivem em um mesmo setor ocorra apenas uma vez. Com efeito, as empresas definem que quantidade produzir repetidamente no tempo: toda semana, ou toda quinzena, ou todo mês etc. Assim, uma situação como a descrita anteriormente não aconteceria apenas uma vez, mas *periodicamente*.

Com efeito, na prática, as empresas definem a quantidade a ser produzida mensalmente, trimestralmente etc. de tal forma que a decisão de respeitar ou não a meta do cartel se repete no tempo. Com isso, precisamos de um outro modelo, pois um modelo de jogo simultâneo se mostra inadequado para tratar de situações de interação estratégica que se repetem no tempo: precisamos estudar como se analisam modelos de jogos *repetidos*.

Um jogo repetido é um jogo que, como o próprio nome indica, se repete um número finito, ou infinito, de vezes. Esse jogo que se repete é conhecido como "jogo-base" (no nosso caso, o jogo-base é o jogo apresentado na Figura 7.1). Os jogos repetidos possuem algumas particularidades interessantes. Por exemplo, a cada repetição as estratégias do jogo devem permanecer *constantes*.

Assim, o que muda ao longo do processo de interação estratégica é a *história* do jogo, isto é, o registro de como os jogadores se comportaram até o presente. Outro fator importante a ser considerado no jogo, tratando-se de um jogo com

um número finito de repetições, é quão distante uma dada etapa se encontra do momento de término do jogo.

Vamos começar pelos jogos repetidos finitos. Após estudar os paradoxos que esse tipo de jogo produz, estudaremos os jogos repetidos infinitos.

O PROBLEMA DA COOPERAÇÃO EM JOGOS REPETIDOS FINITOS

Considere agora que o jogo do cartel, apresentado anteriormente, se estende por dois períodos. Suponha ainda que ele se desenrola da seguinte maneira: a Empresa 1 e a Empresa 2 tomam a decisão sobre que quantidade produzir simultaneamente, no primeiro período.

No segundo período, *conhecendo o que foi decidido no primeiro período*, as duas empresas voltam a decidir, simultaneamente, quanto produzir. Como o jogo se desdobra agora em duas etapas, é natural perguntarmos se alguma forma de cooperação poderia surgir no jogo do cartel, pela perspectiva de ganhos por cooperar, na segunda etapa.

Será que a perspectiva de ganhos na segunda etapa não estimularia as empresas a cooperarem na primeira, em vez de buscarem ganhos imediatos na primeira etapa e com isso sacrificarem os lucros de cartel na segunda? Haveria alguma chance de o cartel se sustentar agora?

Como os jogadores são racionais, a cada etapa do jogo *cada jogador faz sua escolha considerando as consequências que essa escolha terá para o futuro desenrolar do jogo*. Em outras palavras, os jogadores sempre antecipam as consequências de suas escolhas para o desenvolvimento da situação de interação estratégica em que se encontram.

Assim, uma maneira aconselhável de analisar esse jogo é por meio do método de indução reversa, que estudamos no capítulo anterior: como cada jogador toma suas decisões considerando as consequências para o desenvolvimento do jogo, é como se antecipassem o resultado final, e retrocedessem até chegar à etapa em que se encontram. Esse processo é bastante facilitado pelo fato de que, nesse caso, trata-se de um jogo com um número finito de etapas (duas).

Para isso, analise a situação das empresas, no segundo período. Nenhuma outra etapa se segue ao segundo estágio do jogo. A situação de interação estratégica termina aqui. Desse modo, na segunda (e última) fase do jogo é como se os jogadores estivessem jogando um jogo simultâneo.

Tratando essa segunda etapa *como se* fosse um jogo simultâneo, sabemos que a escolha da ação {Não Coopera} gera resultados sempre melhores do que a escolha da ação {Coopera}. Assim, é razoável supor que, sendo racionais,

ambas as empresas escolherão não cooperar. Esse, portanto, será o resultado no segundo e último estágio do jogo. O que irá ocorrer no primeiro estágio?

Vamos considerar agora a primeira fase isoladamente. Já sabemos que a ação {Coopera} gera resultados sempre piores do que {Não Coopera}. Assim, considerando a primeira etapa do jogo isoladamente, temos como resultado que as duas empresas estabelecem quantidades não cooperativas.

Mas como esse não é um jogo simultâneo e sim um jogo repetido, e dessa forma os jogadores não consideram apenas as estratégias que constituem a melhor resposta em cada etapa do jogo, mas as consequências dessas estratégias para o desenvolvimento *futuro* do jogo, poderíamos voltar a indagar: a opção por cooperar na primeira etapa do jogo não poderia levar à cooperação nas etapas seguintes?

Isso não ocorre, pois, conforme vimos, não haverá razão para cooperação na segunda etapa do jogo, já que *não há nenhuma interação futura que justifique cooperar na segunda e última fase do jogo*. Sendo isso de conhecimento comum, as empresas não vêem razão para cooperar também na primeira etapa do jogo, uma vez que *cooperar na primeira etapa do jogo não induzirá cooperação na segunda etapa*. A consequência, então, é que a cooperação não surge nem na primeira nem na segunda etapa do jogo, e o cartel não se sustenta em nenhum momento.

O mesmo resultado seria obtido se, em vez de termos um jogo repetido em duas etapas, tivéssemos um jogo repetido 50, cem ou mil vezes. Considere o leitor o caso em que o jogo do cartel da Figura 6.1 fosse jogado cem vezes. Na centésima vez, as duas empresas não teriam nenhum estímulo a cooperar, uma vez que isso não induziria qualquer cooperação futura, dado que a centésima vez que o jogo é jogado é também a última.

Como na centésima vez não haverá cooperação, também não haverá motivo para cooperar na 99ª vez, uma vez a que cooperação na 99ª repetição não induziria à cooperação na etapa seguinte. Da mesma forma, como não haverá cooperação na 99ª vez, não haverá estímulo para cooperar na 98ª etapa, e assim por diante, até chegarmos à primeira etapa, exatamente como no jogo mais simples com apenas duas etapas.

O leitor pode estar se questionando acerca do realismo da hipótese de um cartel com um número finito de etapas de interação entre as empresas, como se fosse um cartel "com hora para acabar". Na verdade, a ideia de um cartel, ou de forma mais geral, de um processo de interação estratégica, que se repete no tempo mas que possui um horizonte de término definido não é tão irreal quanto pode parecer a princípio.

Com efeito, há vários sentidos em que um processo de interação estratégica pode "acabar". Voltando ao exemplo do hipotético cartel de empresas produ-

toras de cimento, pode estar prevista a entrada de uma grande produtora de cimento para um determinado momento após a data em que as empresas estabelecidas estão considerando a possibilidade de formarem o cartel.

Com a entrada de um novo jogador no mercado, cujo comportamento ainda seria desconhecido das empresas estabelecidas, o cartel teria forçosamente de terminar com a entrada da nova empresa. Qualquer acordo entre as empresas estabelecidas, portanto, seria um acordo com "data para acabar", e teria o problema que apontamos anteriormente para induzir as empresas estabelecidas à cooperação.

Temos então um resultado interessante: em um jogo finito, em que o jogo-base é do tipo dilema dos prisioneiros, não temos razão para acreditar que os jogadores adotarão estratégias cooperativas. Esse resultado algo surpreendente, de que uma repetição finita não leva a um melhor resultado para os jogadores, pode ser estendido para outras formas de interação na economia.

Um exemplo é o famoso *paradoxo da cadeia de lojas*, discutido por Reinhard Selten (1930-). Para estudar esse tipo de paradoxo, vamos supor uma loja de departamentos, que tem de decidir se luta para tentar impedir a entrada de uma empresa Desafiante sucessivamente em cada uma das quinze cidades em que tem lojas, ou se acomoda a entrada dessa empresa.[3]

O jogo-base desse jogo repetido é apresentado a seguir:

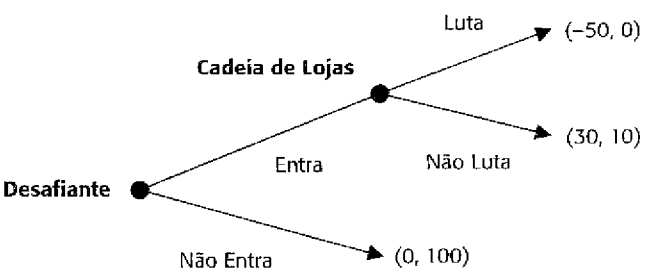


Figura 7.2 O Jogo-Base do Paradoxo da Cadeia de Lojas

Como o leitor já deve ter percebido, o equilíbrio perfeito do jogo-base do paradoxo da cadeia de lojas é dado pela Desafiante entrando e a Cadeia de Lojas acomodando a entrada da nova empresa (a ameaça de luta não é crível).[4] Mas se essa situação tivesse de se repetir sucessivamente nas quinze cidades di-

3 Sugerimos ao leitor que tenha dúvidas acerca do conceito de luta e de acomodamento da entrada de um concorrente que consulte o capítulo anterior.

4 Os conceitos de equilíbrio perfeito e ameaça crível foram apresentados no capítulo anterior.

ferentes, não seria mais racional, por parte da cadeia de lojas, lutar em cada uma das cidades, para estabelecer uma reputação de "dura" na competição?

Vamos analisar esse jogo também por indução reversa. Na 15ª cidade, não seria racional para a Cadeia de Lojas lutar contra a entrada da Desafiante, pois o prejuízo que isso geraria não resultaria em qualquer ganho de reputação para a Cadeia de Lojas, uma vez que não haveria nenhuma outra cidade a ser invadida.

Dado que a entrada não seria impedida na 15ª cidade, e dado que isso é de conhecimento comum dos jogadores, também não há nenhum ganho de reputação em impedir a entrada na 14ª cidade: uma vez que ambos os jogadores sabem que não haverá luta na 15ª cidade, lutar na 14ª não impedirá a entrada na 15ª, sendo assim um custo desnecessário, em que a Cadeia de Lojas, sendo racional, não incorrerá.

Pelo mesmo motivo não se justificaria incorrer no custo de luta na 13ª cidade, uma vez que ambos os jogadores já sabiam, e assim por diante, até a primeira cidade. A conclusão é que *a Cadeia de Lojas não lutaria em nenhuma das 15 cidades*, acomodando a entrada de sua nova concorrente. Esse resultado surpreendente é conhecido como **o paradoxo da cadeia de lojas.**

O leitor deve estar se perguntando o que há de errado por aqui, uma vez que, na prática, o que se observa é que cartéis infelizmente existem e empresas muitas vezes lutam contra a entrada de novos competidores nos seus mercados.[5] Na verdade, os modelos de jogos discutidos anteriormente adotam algumas hipóteses simplificadoras que usualmente não se verificam na prática.

Por exemplo, considerando o paradoxo da cadeia de lojas, nem sempre as recompensas dos jogadores, associadas às suas estratégias, são de conhecimento comum. Assim, muitas vezes ocorre que a empresa entrante não conhece exatamente o custo de luta para a empresa estabelecida e, desse modo, se ela responder com uma feroz guerra de preços à entrada da empresa estreante na primeira cidade pode induzi-la a acreditar que o custo de luta para a empresa estabelecida é baixo, desestimulando a entrada nas outras cidades. Não é por acaso que entre as informações que as empresas procuram ocultar com maior cuidado estão os dados referentes a seus custos.

Outro problema associado a esse tipo de modelagem de interação estratégica é que ele supõe que a interação é *finita*, isto é, que o jogo se repete um número finito de vezes, o que é de conhecimento comum dos jogadores. Com efeito, isso muitas vezes não corresponde à realidade. No caso do jogo do cartel, a

---

5 Vimos no capítulo anterior que as empresas podem adotar movimentos estratégicos para tornar essa ameaça crível.

contradição com os fatos é mais visível: não faz sentido esperar que duas empresas tenham a expectativa de que o cartel dure apenas dois períodos, exceto se há algum motivo especial para isso, conforme vimos.

Apenas em situações muito peculiares – como, por exemplo, no caso em que uma das empresas decide sair do mercado; ou, conforme vimos, caso uma grande empresa anuncie que vai entrar no setor; ou ainda, em se tratando de um mercado regulado, caso haja, em uma data determinada, a desregulamentação do mercado, aumentando significativamente o número de empresas no setor – é que podemos esperar uma interação finita.

No caso do paradoxo da cadeia de lojas, a falta de realismo das premissas é menos perceptível, mas, ainda assim, importante. É razoável supor que, no momento de decidir se luta ou não contra a entrada, a empresa estabelecida considere *apenas* as 15 cidades em que atua no presente?

Na verdade, não. Embora atue em 15 cidades hoje, toda empresa sabe que, sem expansão, sem crescimento, a sobrevivência no futuro estará em risco. Assim, ao decidir se responde por meio de uma guerra de preços a uma nova entrada, a empresa estabelecida tem de considerar não só as consequências de sua estratégia para as cidades em que atua hoje, *mas também para todas as cidades em que vier a atuar no futuro*, ainda que a empresa estabelecida não tenha clareza de quantas e quais serão.

Em resumo, a hipótese de que o jogo possui um número de repetições definido, e que isso é de conhecimento comum dos jogadores, não é adequada para tratar uma série de interações estratégicas na economia. Um modelo mais adequado para esse tipo de análise é o de jogos infinitamente repetidos, que veremos um pouco mais adiante.

Contudo, antes de discutirmos jogos infinitamente repetidos, precisamos estender a noção de equilíbrio perfeito em subjogos para jogos repetidos finitos. Esse será nosso próximo assunto.

Equilíbrio Perfeito em Subjogos em Jogos Repetidos Finitos

Na verdade, o problema do cartel pode ser generalizado como um problema de incentivar a cooperação na ausência de instrumentos coercitivos para fazê-lo, quando os jogadores estão envolvidos em uma situação do tipo dilema dos prisioneiros. Assim, a análise pode ser desenvolvida com qualquer jogo na forma estratégica que reproduza a mesma relação de recompensas do dilema dos prisioneiros.

Na Figura 7.3 apresentamos uma outra versão do dilema dos prisioneiros:

	Jogador 2	
Jogador 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	1, 1	−1, 2
Não Coopera	2, −1	0, 0

Figura 7.3 Retomando o Dilema dos Prisioneiros em Outra Versão

O leitor deve perceber que, embora os números que representam as recompensas tenham sido alterados, a relação entre eles permanece a mesma do dilema dos prisioneiros que apresentamos no Capítulo 3. Fizemos isso apenas para simplificar nosso trabalho daqui para a frente, mas o leitor não deve esquecer que os valores das recompensas, em si, não são importantes: apenas a relação entre eles, que expressa a relação de preferência de cada jogador por cada combinação de estratégias, é relevante.

Embora suas recompensas tenham sido reformuladas, a tabela da Figura 6.3 continua representando o jogo-base de um jogo repetido duas vezes. Como são definidas as *estratégias* dos jogadores nesse caso? Note que, dado o jogo-base, há quatro resultados possíveis na primeira etapa do jogo repetido: (Coopera, Coopera), (Coopera, Não Coopera), (Não Coopera, Coopera) e (Não Coopera, Não Coopera).

Embora na primeira etapa os jogadores decidam simultaneamente o que fazer e, portanto, decidam sem conhecer as decisões uns dos outros, ao passarmos à segunda etapa os jogadores tomam conhecimento de qual foi o resultado na primeira etapa. E com base nesse conhecimento do primeiro resultado, decidirão o que fazer na segunda etapa.

Em outras palavras, o resultado da primeira etapa irá compor a *história* do jogo. E é em função dessa história que os jogadores (em qualquer jogo repetido) vão orientar suas escolhas na etapa seguinte.

Dessa forma, podemos estabelecer que:

As estratégias dos jogadores, em jogos repetidos (sejam finitos ou infinitos), especificam, *dada a história do jogo até ali*, que ação tomar em cada etapa do jogo.

O leitor deve observar, inicialmente, que dada essa caracterização de estratégias em jogos repetidos, *não importa se o jogo em questão se trata de um jogo finito ou infinito*: de uma forma ou de outra, ambos têm histórias que serão consideradas por seus jogadores no momento de definir suas estratégias.

Em segundo lugar, essa forma de caracterizar as estratégias em jogos repetidos, como sendo definidas em função das possíveis histórias do jogo até cada etapa, não deve parecer incomum: em nossa vida cotidiana, é muito comum decidirmos o que fazer em função do comportamento de nossos pares conosco. É exatamente disso que estamos falando.

Vamos examinar agora os subjogos que existem em um jogo repetido. Se o leitor recordar a identificação que fizemos dos subjogos em jogos sequenciais, no capítulo anterior, perceberá que cada subjogo é como um "pedaço" do jogo, que vai de um determinado nó, isto é, de um ponto em que um dos jogadores é chamado a decidir, até o final do jogo. Além disso, um subjogo sempre se inicia em um único nó de decisão.

Na prática, isso significa que o jogador que é chamado a escolher que ação tomar, no nó em que se inicia o subjogo, *conhece toda a história do jogo até aquele momento*. Podemos aplicar essa noção aos jogos repetidos finitos, obtendo assim a seguinte definição de subjogo para esse gênero de jogos:

Em um **jogo repetido *n* vezes**, um **subjogo** começando em uma dada etapa do jogo *t* é o jogo repetido, que é jogado de *t* até a *n*-ésima (e última) etapa.

Nessa caracterização, fica evidente que o subjogo, em jogos repetidos finitos, corresponde ao "pedaço" do jogo que vai de uma dada etapa até a etapa final. Do fato de que o subjogo começa em uma etapa, na qual o jogador que é chamado a decidir o que fazer conhece toda a história do jogo até ali, temos o fato importante de que *há tantos subjogos se iniciando em uma dada etapa do jogo repetido finito quantas forem as possíveis histórias do jogo até aquela etapa*.

Vejamos um exercício a partir do nosso jogo-base do dilema dos prisioneiros da Figura 7.3, repetido duas vezes, para que essa ideia fique mais clara. No jogo do dilema dos prisioneiros da Figura 7.3, cada subjogo se inicia a partir de cada resultado possível da primeira etapa do jogo.

Dessa forma, por exemplo, temos um subjogo que se inicia a partir do resultado (Coopera, Coopera), outro, a partir do resultado (Coopera, Não Coopera) etc. A partir de cada um desses resultados há um subjogo diferente, em que os jogadores escolhem simultaneamente se irão cooperar, ou não, na segunda etapa do jogo.

Vamos ilustrar isso com um exemplo. Suponha que os jogadores da Figura 7.3 decidam cooperar na primeira jogada. Isso significa que podemos somar as recompensas (1, 1) às recompensas representadas no jogo-base, que os jogado-

res obtiveram na primeira etapa. O subjogo que se inicia a partir de (Coopera, Coopera) na primeira etapa é representado na Figura 7.4:

	Jogador 2	
Jogador 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	2, 2	0, 3
Não Coopera	3, 0	1, 1

Figura 7.4 O Subjogo que se Segue a (Coopera, Coopera)

É fácil perceber então que teremos quatro subjogos, iniciando em (Coopera, Coopera), (Não Coopera, Coopera), (Coopera, Não Coopera) e (Não Coopera, Coopera). É importante notar que esses são os subjogos possíveis a partir dos resultados da primeira etapa, exatamente porque temos apenas **duas** etapas do nosso jogo repetido finito do dilema dos prisioneiros da Figura 7.3.

Se esse jogo fosse repetido não duas, mas três vezes, teríamos $4 \times 4 = 16$ possibilidades em termos de *história do jogo* até a terceira etapa. E assim por diante, à medida que são aumentadas as etapas em que o jogo-base é repetido.

Podemos construir uma tabela, no formato da Figura 7.5, para cada subjogo associado a um resultado da primeira etapa de nosso jogo do dilema dos prisioneiros da Figura 7.3:

		Jogador 2	
Resultado da Primeira Etapa	**Jogador 1**	**Coopera**	**Não Coopera**
Subjogo a Partir de (Coopera, Coopera)	Coopera	2, 2	0, 3
	Não Coopera	3, 0	**1, 1**
Subjogo a Partir de (Não Coopera, Coopera)	Coopera	3, 0	1, 1
	Não Coopera	4, −2	**2, −1**
Subjogo a Partir de (Coopera, Não Coopera)	Coopera	0, 3	−2, 4
	Não Coopera	1, 1	**−1, 2**
Subjogo a Partir de (Não Coopera, Não Coopera)	Coopera	1, 1	−1, 2
	Não Coopera	2, −1	**0, 0**

Figura 7.5 Os Subjogos do Jogo Repetido Finito

Na Figura 7.5, apresentamos os quatro subjogos do jogo do dilema dos prisioneiros da Figura 7.3 repetido duas vezes, a partir das quatro possibilidades de resultado na primeira etapa: (Coopera, Coopera), (Não Coopera, Coopera), (Coopera, Não Coopera) e (Não Coopera, Não Coopera).

Da mesma forma, assinalamos na Figura 7.5 os equilíbrios de Nash *em cada subjogo*. Assim, a recompensa (1,1) em negrito determina que (Não Coopera, Não Coopera) é o equilíbrio de Nash no subjogo que se segue a (Coopera, Coopera), e assim por diante. Isso nos permite identificar que há somente uma combinação de estratégias que constitui um equilíbrio de Nash *em todos os subjogos*: a combinação de estratégias em que os dois jogadores não cooperam.

Por constituir um equilíbrio de Nash *em todos os subjogos*, a combinação de estratégias em que os jogadores não cooperam na primeira etapa e também não cooperam na segunda etapa, independentemente do resultado da primeira (lembremos que estratégias devem especificar as ações do jogador para todas as circunstâncias), constitui um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Isso corrobora nossa conclusão anterior, quando solucionamos o jogo do cartel da Figura 7.1 repetido duas vezes, por indução reversa, e concluímos que nenhuma das empresas coopera, ou seja, respeita o cartel.

Como o leitor já deve estar suspeitando, não é mera coincidência que o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se fundamente na repetição do equilíbrio de Nash no jogo-base. Ao analisarmos os possíveis resultados de cada subjogo, somamos as recompensas de cada possível resultado da primeira etapa (ou a soma total dos possíveis resultados das etapas anteriores, no caso de jogos finitos repetidos mais de duas vezes) ao resultado da última etapa.

Na medida em que estamos somando um mesmo valor a todas as recompensas do jogo-base, a estrutura do jogo não se modifica e, desse modo, o que era o *único* equilíbrio de Nash no jogo-base continua equilíbrio de Nash na n-ésima etapa de um jogo repetido. Isso nos leva a um resultado importante:

Qualquer jogo repetido finito n vezes, em que o jogo-base apresente apenas um equilíbrio de Nash, possui um único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, que consiste em jogar o equilíbrio de Nash do jogo-base em todas as n etapas.

Caso tenhamos mais de um equilíbrio de Nash no jogo-base, pode-se demonstrar que:

Em um jogo repetido finito, em que o jogo-base apresenta mais de um equilíbrio de Nash, qualquer sequência de combinações de estratégias que sejam equilíbrios de Nash no jogo-base pode constituir um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Para entendermos esse resultado, considere novamente o jogo de coordenação do padrão tecnológico, que apresentamos no Capítulo 3:

SysOp	AntiVírus	
	Atualizar	Não Atualizar
Desenvolver	2, 1	−1, −2
Não Desenvolver	0, −1	1, 2

Figura 7.6 O Jogo de Coordenação do Padrão Tecnológico

Nesse jogo, uma combinação de estratégias do tipo "escolha desenvolver a nova ferramenta no primeiro período e então, independentemente do que aconteça no primeiro período, não desenvolva uma nova ferramenta no segundo", para a SysOp, e "escolha atualizar o programa no primeiro período e então, independentemente do que aconteça no primeiro período, não atualize seu programa no segundo", para a AntiVírus, constitui um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Também constitui um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos uma combinação de estratégias do tipo "escolha não desenvolver a nova ferramenta no primeiro período e, então, independentemente do que aconteça no primeiro período, desenvolva uma nova ferramenta no segundo", para a SysOp, e "escolha não atualizar o programa no primeiro período e, então, independentemente do que aconteça no primeiro período, atualize seu programa no segundo", para a AntiVírus. Como temos dois equilíbrios de Nash no jogo-base, qualquer combinação desses equilíbrios em cada etapa pode constituir um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Todavia, há ainda mais um resultado que pode ser derivado de jogos repetidos finitos, *em que o jogo-base possui mais de um equilíbrio de Nash*. Não apenas qualquer sequência de combinação de estratégias envolvendo os equilíbrios de Nash no jogo-base pode constituir um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, *mas também combinações de estratégias que não envolvam, em alguma etapa do jogo, um equilíbrio de Nash no subjogo, podem, ainda assim, constituir um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.*

Para entender como isso pode acontecer, considere o jogo a seguir:

Empresa Automobilística	Fornecedor		
	Entrega Urgente	Entrega Normal	Entrega Rápida
Peça em Liga Especial	4, 3	0, 0	2, 5
Peça em Aço Comum	0, 1	2, 2	0, 1

Figura 7.7 O Jogo de Coordenação da Cadeia Produtiva

Neste jogo, uma empresa automobilística está decidindo se lança seu novo modelo esportivo incluindo uma determinada peça em liga metálica especial ou em aço comum. Seu fornecedor oferece normalmente três formas de entrega: entrega urgente (a mais cara), entrega normal (a mais barata) e entrega rápida, cuja rapidez e custo são intermediários em relação às outras duas formas de entrega. As recompensas na forma estratégica da Figura 7.7 representam as margens de lucro da empresa automobilística e de seu fornecedor, de acordo com a forma de entrega.

O leitor já deve ter percebido que há dois equilíbrios de Nash no jogo simultâneo da Figura 7.7: (Peça com Liga Especial, Entrega Rápida) e (Peça em Aço Comum, Entrega Normal). Se a empresa automobilística conseguisse convencer seu fornecedor a oferecer a peça com liga especial na entrega urgente, sua margem de lucro seria a maior possível. Mas, para maximizar sua margem, o fornecedor deve entregar a peça em liga especial pela entrega rápida.

A outra opção em que nem a empresa automobilística nem o fornecedor conseguem ganhar alterando suas decisões é aquela em que é entregue uma peça em aço comum pela entrega normal.

Imagine agora que, em vez de um jogo simultâneo, o jogo da Figura 7.7 represente o jogo-base de um jogo repetido duas vezes. Será que existe algum equilíbrio de Nash perfeito em subjogos no qual seja possível que, em algum momento, seja jogado (Peça com Liga Especial, Entrega Urgente)?

Podemos imaginar que a empresa automobilística está fazendo um contrato por dois anos, de acordo com o qual no primeiro ano teria maior urgência da peça, para atender seu mercado e conseguir formar estoques. Assim, a empresa automobilística adota (e informa a seu fornecedor) a seguinte estratégia: vai escolher solicitar a peça com liga especial com entrega urgente no primeiro ano.

Se esse resultado se efetivar, no segundo ano ela solicitará a mesma peça pela entrega rápida. Mas, se no primeiro ano a peça solicitada não for entregue com urgência, no segundo ano ela pedirá apenas a peça de aço comum com entrega normal. Essa decisão da empresa automobilística pode compor um equilíbrio perfeito de Nash em subjogos no nosso jogo repetido finito da Figura 7.7?

Vejamos se o fornecedor tem algum incentivo em se desviar e não fornecer a peça em liga especial pela entrega urgente. Se ele o fizer, entregando a peça em liga especial pela entrega rápida, sua recompensa no primeiro período aumentará de 3 para 5. Contudo, no segundo período, a empresa automobilística encomendará apenas peças em aço comum pela entrega normal: o fornecedor deixará de ganhar 5 para ganhar apenas 2.

Assim, um desvio em relação à estratégia adotada pela indústria automobilística tem um custo ao fornecedor de: $5 - 2 = 3$. Esse custo é maior do que o ganho por

se desviar no primeiro período, de $5 - 3 = 2$. Em outros termos, ele deixará de totalizar uma recompensa de $3 + 5 = 8$ nos dois anos, para totalizar $5 + 2 = 7$. O leitor é convidado no exercício 6.2 no final deste capítulo a demonstrar que também a indústria automobilística não tem motivos para se desviar de sua estratégia.

Assim, jogos repetidos n vezes (*cujo jogo-base possua mais de um equilíbrio de Nash*) podem ter equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos que envolvam resultados, em alguma das n repetições do jogo-base, *que não sejam equilíbrios de Nash do jogo-base*.

Esse resultado nos chama a atenção para o fato de que estratégias que envolvem retaliações em função do comportamento dos demais jogadores ao longo da história do jogo enriquecem significativamente as possibilidades de resultados e, dessa forma, a análise. Isso ficará ainda mais claro ao tratarmos dos jogos infinitamente repetidos.

JOGOS INFINITAMENTE REPETIDOS: TENTANDO PROMOVER A COOPERAÇÃO

Vamos enfocar o tema dos jogos infinitamente repetidos a partir do dilema dos prisioneiros, na versão da Figura 7.3. A razão de fazermos isso é que o dilema dos prisioneiros sintetiza exatamente o problema de se induzir a cooperação quando os jogadores obtêm ganhos imediatos se não cooperarem.

O dilema dos prisioneiros, assim, é uma espécie de síntese de algo que afeta cartéis, contratos comerciais, *joint-ventures*, alianças políticas etc. Por exemplo, considere um cartel. Como vimos, o problema do cartel é que obedecê-lo e restringir a produção gera ganhos menores do que desobedecê-lo enquanto os outros membros do cartel restringem a produção deles. Mais grave ainda: quem tiver se mantido dentro das regras do cartel verá seus lucros se reduzirem a um nível inferior ao que seria se não tivesse ingressado no cartel.

Contudo, o problema da não-cooperação não se resume apenas a cartéis. Todo acordo em que há ganhos imediatos expressivos caso se adote um comportamento não-cooperativo se enquadra no mesmo tipo de situação que é descrita como um dilema dos prisioneiros.

Considere, por exemplo, nosso caso hipotético de duas empresas em que uma fornece um insumo específico para a produção da outra. Uma vez que a empresa produtora tenha feito os investimentos específicos para a produção do insumo, ela pode se tornar, em grande medida, dependente da sua cliente, para que esses investimentos se tornem rentáveis.

A empresa que adquire o insumo específico, sabendo disso, pode ameaçar adiar ou mesmo interromper a aquisição do insumo, para obter um preço mais baixo e

com isso ganhos de curto prazo expressivos. Ou, por outro lado, se a empresa que adquire o insumo for dependente de sua fornecedora, sem a possibilidade de uma troca de fornecedor imediata, pode ser que a empresa que fornece o insumo é que faça pressão por um preço maior, em busca, novamente, dos ganhos de curto prazo.

Em termos mais gerais, há um grande número de contratos em uma economia moderna que podem gerar ganhos substanciais de curto prazo caso alguma das partes envolvidas resolva descumpri-los em alguma medida.

É bom destacar, conforme vimos no nosso caso hipotético das duas empresas vinculadas em uma relação de fornecimento de um insumo específico, que esse descumprimento não precisa ser total: um atraso no cumprimento das cláusulas contratuais, um desrespeito sutil em algo que foi estabelecido no contrato, um pedido de revisão de alguma condição do contrato após ele ter sido firmado, ameaças de disputa na Justiça etc., são exemplos de descumprimento de contratos, ou de comportamento não-cooperativo.

Essa possibilidade de descumprimento de acordos e contratos ocorre porque, em um dilema dos prisioneiros, os jogadores se veem presos a um equilíbrio de Nash que representa uma situação ineficiente do ponto de vista do ótimo de Pareto, exatamente porque a não-cooperação por parte de um jogador, enquanto os demais cooperam, gera recompensas que superam as recompensas do comportamento cooperativo.

O problema é que, no caso em que todos se comportam dessa forma não-cooperativa, o resultado para todos é o pior possível: os contratos são quebrados, oportunidades lucrativas são perdidas e os custos de disputas judiciais são em geral elevados. As possibilidades de bem-estar em uma sociedade na qual todos se comportam com o oportunismo de curto prazo descrito pelo jogo do dilema dos prisioneiros são muito reduzidas.

Os economistas têm um termo para designar todos os *custos* envolvidos na tentativa de negociar acordos que sejam aceitáveis para os envolvidos, redigir contratos que protejam as partes de comportamentos não-cooperativos e, caso haja algum descumprimento do contrato, garantir que as partes prejudicadas sejam ressarcidas pelos danos. Esses custos são chamados pelos economistas de **custos de transação**.

O problema quando todos agem de forma oportunista, adotando comportamentos não-cooperativos, é que o aumento dos custos de transação reduz o volume de transações que são feitas na economia, reduzindo com isso a oferta de bens e serviços e o bem-estar social.

Em resumo, nas situações descritas como dilemas do prisioneiro, "trapacear" produz vantagens superiores à honestidade, o que representa uma situa-

ção bastante desfavorável, em princípio, à cooperação entre os jogadores. Assim, se ficar demonstrado que, mesmo nesse tipo de interação estratégica, há uma boa possibilidade de, em determinadas circunstâncias, se desenvolver a cooperação, teremos um poderoso instrumento para antecipar quando e como a cooperação pode se desenvolver no mundo dos negócios onde, não raro, existem ganhos de curto prazo em descumprir contratos.

Portanto, a investigação acerca das condições a partir das quais pode emergir a cooperação no dilema dos prisioneiros é do maior interesse, não apenas para analisar, do ponto de vista da defesa da concorrência, as chances de se formar um cartel em determinado setor da economia, mas também e principalmente, como instrumento para a análise das possibilidades de cooperação na economia e do aumento do bem-estar.

Aqui, todavia, há duas questões importantes. A primeira delas está relacionada ao fato de que, em todo este capítulo, estamos preocupados com o surgimento *espontâneo* da cooperação em situações de interação estratégica que podem ser descritas como dilemas dos prisioneiros, ou seja, situações em que a cooperação *não* pode ser obtida por meio da coação dos jogadores.

Se há instrumentos de coerção externos à interação estratégica entre os agentes, o dilema dos prisioneiros e os problemas de cooperação que ele gera podem ser resolvidos alterando-se as recompensas dos jogadores. A possibilidade de punição, portanto, reduziria os ganhos resultantes da adoção de comportamento não-cooperativo.

Para ilustrar o que estamos querendo dizer, vamos retornar ao dilema dos prisioneiros da Figura 7.3, e vamos supor agora que alguma instituição pública estabeleceu uma multa sobre o comportamento não-cooperativo dos jogadores, no valor de x. O jogo do dilema dos prisioneiros da Figura 7.3 seria descrito pela forma estratégica da Figura 7.8:

	Jogador 2	
Jogador 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	1, 1	-1, $(2-x)$
Não Coopera	$(2-x)$, -1	$(0-x)$, $(0-x)$

Figura 7.8 Dilema dos prisioneiros com Coerção Externa

Qual deve ser o valor da multa x que a instituição pública deve estabelecer para alterar o comportamento dos jogadores? Se a intenção da instituição pública é de que a estratégia não-cooperativa nunca seja adotada, o valor de x

deve ser tal que a estratégia cooperativa se torne estritamente dominante em relação à estratégia não-cooperativa.

Assim, temos que, simultaneamente para os dois jogadores, basta que $x > 1$ para que a estratégia não-cooperativa se torne estritamente dominada pela estratégia cooperativa. O leitor pode verificar que se $x = 2$, a forma estratégica do dilema dos prisioneiros da Figura 7.8 se torna a forma estratégica da Figura 7.8 (a):

	Jogador 2	
Jogador 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	1, 1	−1, 0
Não Coopera	0, −1	−2, −2

Figura 7.8 (a) Dilema dos prisioneiros com Coerção Externa, $x = 2$

No caso da forma da Figura 7.8 (a), agir de forma cooperativa é estritamente dominante em relação a agir de forma não-cooperativa. O problema da não-cooperação foi, em princípio, resolvido.

Mas há algumas considerações a serem feitas. A primeira delas é que um valor adequado para a pena dos jogadores que adotarem um comportamento não-cooperativo é essencial para qualquer sistema de coerção externa. O leitor mesmo pode verificar que, se em vez de fazermos $x = 2$ na Figura 7.8 (a) tivéssemos feito $x = 0{,}5$, a punição seria insuficiente para alterar o equilíbrio de Nash do jogo da Figura 7.8, de (Não Coopera, Não Coopera) para (Coopera, Coopera).

Desse modo, um valor da punição correto é essencial para impedir comportamentos não-cooperativos. O problema é que nem sempre uma autoridade externa ao jogo possui informações suficientes para identificar o valor correto da punição a ser aplicada, e uma punição com valor insuficiente é inócua: os jogadores acham que "vale a pena" sofrer a punição diante dos ganhos líquidos que, ainda assim, podem obter.

Há ainda uma segunda dificuldade para imposição de uma coação externa que obrigue os jogadores a se comportarem cooperativamente: o custo. Estabelecer uma instituição que identifique e puna comportamentos não-cooperativos tem um custo, custo este que cresce com o aumento do número de jogadores que podem adotar comportamentos não-cooperativos.

Na verdade, se o número de agentes que adota comportamento não-cooperativo for muito grande, a possibilidade de que o custo das instituições necessárias para coagir os jogadores a adotarem comportamentos cooperativos se tor-

ne simplesmente proibitivo é grande. Em outras palavras, o custo de instituições que vigiassem e punissem todos, ou quase todos os indivíduos, se eles decidissem trapacear, tornaria essa vigilância e punição impraticáveis.

Com efeito, a epígrafe de Einstein que encabeça este capítulo traduz o reconhecimento de que os instrumentos de coerção podem ser insuficientes se a maioria dos indivíduos em uma sociedade decidir agir de forma não-cooperativa. É preciso que uma parcela significativa da sociedade escolha espontaneamente cooperar, ou a cooperação será impossível de se obter por meio de coerção.

Daí a importância que autores modernos têm dado à cooperação espontânea como instrumento para reduzir os custos de transação e aumentar o bem-estar das sociedades. Mas como obter a cooperação espontaneamente? Como conseguir que os jogadores decidam espontaneamente cooperar em um dilema dos prisioneiros?

Chegamos então à segunda questão importante, que diz respeito a nossa pesquisa quanto às condições para o surgimento espontâneo da cooperação no dilema dos prisioneiros. Essa outra questão refere-se ao fato de que a repetição do jogo tem de ser *infinita*. Essa é a única possibilidade, uma vez que vimos que, em um jogo finito, a solução por indução reversa exclui a possibilidade de que a cooperação possa emergir espontaneamente da interação entre os jogadores.

A qualificação infinita não deve, obviamente, ser assumida no sentido estrito, isto é, no sentido de que as interações sejam, necessariamente, intermináveis. Na verdade, assume-se que o processo de interação estratégica repetido é infinito se os jogadores *não sabem* quando esse processo termina. Pode-se muito bem admitir que o processo de interação estratégica termine algum dia, e os jogadores saibam disso, mas se eles não sabem *quando* ele terminará, a forma mais adequada de tratar esse processo é modelando-o como um jogo infinitamente repetido.

Por exemplo, o cartel é uma boa aplicação desse tipo de jogo: os executivos das empresas envolvidas em um cartel sabem que, um dia, muito provavelmente alguma das empresas irá desaparecer, mas nenhum deles sabe quando isto vai ocorrer. Também as duas empresas do nosso hipotético exemplo do fornecimento de insumo específico podem acreditar que, algum dia, uma mudança tecnológica ou o surgimento de outras empresas produzindo o mesmo insumo podem alterar sua relação. Mas no momento pode não haver um horizonte claro de quando isso deverá acontecer.

Assim, estudaremos um jogo no qual os jogadores repetem interminavelmente um jogo-base com as características de um dilema dos prisioneiros. Nosso ponto de partida será o reconhecimento de que receber um real hoje é diferente de receber um real amanhã. Na verdade, receber um real hoje é melhor

do que receber um real amanhã, no sentido preciso de que um real amanhã vale *um pouco menos* do que um real hoje.

Em outras palavras, precisamos *descontar* um valor futuro (o recebimento de um real amanhã), para atualizarmos esse valor futuro, isto é, para *trazê-lo a valor presente*. Para isso, precisamos aplicar ao recebimento futuro, ou futura recompensa, um *fator de desconto*. Vamos estudar agora a determinação do fator de desconto que deve ser aplicado a recompensas futuras.

Vamos iniciar nossa discussão do papel do fator de desconto em um jogo infinitamente repetido por um exemplo bem simples. Imagine que um jogador recebe amanhã uma recompensa de 1 real. Esse jogador vai valorizar o recebimento de 1 real hoje mais do que o recebimento de 1 real amanhã. Assim, 1 real amanhã vale um pouco menos do que 1 real hoje.

Representamos esse fato considerando um **fator de desconto** δ,[6] tal que $0 \leq \delta \leq 1$, que deve ser aplicado às recompensas, ao longo do tempo. O fator de desconto δ está associado a uma **taxa de desconto** (em geral igual à taxa de juros) r, da seguinte forma:

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

Por exemplo, se a taxa de juros é de 5%, r será 0,05 e o fator de desconto será 1/(1,05) = 0,9524, aproximadamente. Quando os jogadores aplicam uma taxa de desconto r sobre valores futuros, de tal forma que $r > 0$, diz-se que os jogadores possuem *preferências intertemporais*, no sentido de que preferem receber suas recompensas hoje a recebê-las amanhã.

O fator de desconto também pode ter uma outra dimensão em jogos infinitamente repetidos: ele pode incorporar a incerteza dos jogadores quanto ao término do processo de interação estratégica.

Vamos supor assim que os jogadores saibam que existe uma dada probabilidade de cada repetição ser a última do jogo. Imagine que essa probabilidade é de 5%. Assim, os jogadores saberiam que, a cada repetição, haveria uma chance de 5% de que o jogo se encerrasse ali.

Vamos também supor, para simplificar, que os jogadores não possuíssem preferências intertemporais. Nesse caso, o fator de desconto, então, expressaria apenas essa probabilidade de que o jogo não continuasse no futuro, de tal forma que teríamos: $\delta = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Caso os jogadores possuam preferências intertemporais e haja, ao mesmo tempo, uma dada probabilidade de o jogo terminar a cada repetição, o fator de

6 Letra grega delta.

desconto teria de levar essas duas dimensões em consideração, simultaneamente. Nesse caso, sendo a probabilidade de o jogo terminar a cada repetição dada por p e a taxa de desconto novamente dada por r, o fator de desconto δ seria dado por:

$$\delta = \frac{1-p}{1+r}$$

Suponha agora que um jogador qualquer obtém, de uma dada esttratégia em um jogo infinitamente repetido, uma sucessão infinita de valores idênticos a 1 real. Teremos de aplicar a esses valores o fator de desconto δ da seguinte forma: ao valor de 1 real recebido no período inicial (presente) não se aplica fator de desconto algum, pois ele é recebido no presente.

A esse valor somamos $1 \times \delta$, que é o valor de 1 real recebido no período seguinte, o segundo período, aplicado o fator de desconto, uma vez que esse valor já é recebido em uma data futura. Assim, aplicamos o fator de desconto sempre que trazemos um valor que será recebido no período seguinte para o período anterior.

O valor recebido no terceiro período, que será adicionado aos valores anteriormente obtidos, será descontado duas vezes – ao ser trazido do terceiro período para o segundo período, e ao ser trazido do segundo período para o período inicial: $1 \times \delta \times \delta = 1 \times \delta^2$. E assim por diante, de tal forma que obtemos a série:

$$1 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + \ldots$$

Como o leitor já deve ter percebido, sendo $\delta < 1$, a expressão anterior é uma progressão geométrica decrescente. Da fórmula de soma dos termos de progressões geométricas, temos que:[7]

$$1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 \ldots = \frac{1}{1-\delta} = S$$

Essa expressão é o *valor presente (isto é, descontado) da série infinita de recompensas* do jogador, supondo que ele recebe o mesmo valor de 1 real em todas as etapas, que chamaremos S.

Vamos retornar ao dilema dos prisioneiros da Figura 7.3 e examinar a possibilidade de cooperação, utilizando para isso a análise de um tipo de estratégia conhecido como **estratégia gatilho**. Uma estratégia gatilho é uma estratégia que

7 A soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente é dada por: $a_1/(1-q)$, onde a_1 é o primeiro termo da série, e q é a razão da progressão geométrica. No caso, temos que $a_1 = 1$ e $q = \delta$.

determina, para o jogador que a adota, seguir um curso de ação enquanto uma determinada condição é satisfeita e, caso essa condição em qualquer momento deixe de ser satisfeita, seguir um outro curso de ação *pelo resto do jogo*.

Um exemplo de estratégia gatilho é a estratégia *severa* (do inglês, *grim*). Na estratégia severa, o jogador que a adota coopera desde que o outro jogador coopere; se o outro jogador deixa de cooperar em algum momento, o jogador que adotou a estratégia severa não mais coopera pelo restante do jogo.

Uma forma de representar a estratégia severa é por meio do diagrama da Figura 7.9:

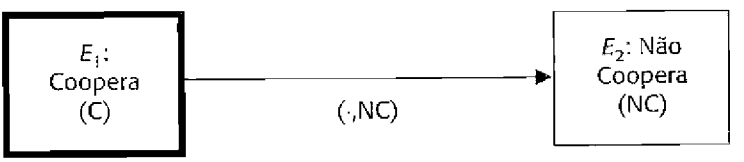


Figura 7.9 Diagrama da Estratégia Severa

Para entendermos a representação da Figura 7.9, temos de considerar que a estratégia severa possua dois estados: o estado E_1, em que o jogador que adotou a estratégia severa decide cooperar (que representaremos simbolicamente por C), e o estado E_2, em que o jogador decide não cooperar (que representaremos simbolicamente por NC). A caixa do estado E_1 é formada por linhas mais grossas, para indicar que esse é o estado em que o jogo se inicia, pois representa a escolha do jogador que adotou a estratégia severa na primeira rodada do jogo.

A flecha indica a condição sob a qual se transita do estado E_1, em que o jogador que adotou a estratégia severa coopera, para o Estado E_2, em que o mesmo jogador não coopera. Podemos ver que, embaixo da seta, está assinalado (·, NC), que representa uma combinação de estratégias em que o *outro jogador*, aqui representado simbolicamente como o segundo jogador, escolheu não cooperar.

BOX 7.1

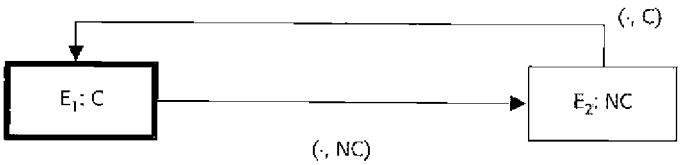
Representando Estratégias em Jogos Infinitamente Repetidos

Vimos a representação da estratégia severa no diagrama da Figura 7.9. Na verdade, aquela é a representação de uma estratégia muito simples. Outras estratégias podem ter representações um pouco mais complexas.

Considere, por exemplo, a estratégia que é conhecida, no jargão de teoria dos jogos, como olho-por-olho (do inglês, *tit-for-tat*). Na estratégia olho-por-olho, o jogador coopera na primeira rodada do jogo e, a partir daí, faz exatamente o que o outro

jogador tiver feito na rodada anterior. Desse modo, se o outro jogador cooperou na rodada anterior, olho-por-olho determina cooperação na rodada atual. Já se o outro jogador não cooperou na rodada anterior, olho-por-olho determina que não se coopere na rodada atual.

Eis a representação de olho-por-olho em diagrama:



Vemos, assim, nesse diagrama, que o estado inicial E_1, que prevalece no início do jogo, é caracterizado pela decisão de cooperar (C). Desse estado passa-se ao estado E_2, que é caracterizado pela decisão de não cooperar (NC) caso o outro jogador tenha jogado não cooperar (indicado por (·, NC)). Porém, é possível retornar ao estado inicial E_1, desde que o outro jogador coopere (·, C).

Nos exercícios, o leitor é convidado a montar o diagrama para uma outra estratégia possível, a estratégia *Pavlov*.

A pergunta que faremos, então, é se essa estratégia, na medida em que o jogador que a adota ameaça com uma retaliação interminável caso o outro jogador se desvie do comportamento cooperativo, poderia produzir a cooperação como um resultado sustentável, em um jogo repetido em que o jogo-base é do tipo dilema dos prisioneiros.

Assim, essa estratégia, além de ilustrar a importância da reputação em jogos infinitamente repetidos, nos permite também reforçar a definição do que se entende por estratégia em jogos repetidos, sejam eles finitos ou infinitos: não devemos esquecer que as estratégias dos jogadores especificam, *dada a história do jogo até ali*, que ação tomar em cada etapa do jogo.

Vejamos então se a estratégia severa, caso fosse aplicada ao dilema dos prisioneiros da Figura 7.3, poderia estimular a cooperação entre os dois jogadores. Suponha que o jogador 1 adote a estratégia severa, cabendo ao jogador 2 decidir qual é a melhor resposta. Vamos então analisar duas alternativas do jogador 2 logo no seu primeiro movimento.

A primeira alternativa do jogador 2 é não cooperar logo na primeira oportunidade, aproveitando-se do fato de que, adotando a estratégia severa, o jogador 1 irá necessariamente cooperar no primeiro período. Qual será a recompensa do jogador 2? As recompensas do jogador 2 serão 2 no primeiro período e 0 a partir daí. Isso porque o primeiro resultado do jogo, no caso de o jogador 2 decidir não cooperar, será 2 para esse mesmo jogador (e –1 para o jogador 1).

A partir daí, como o jogador 1 não mais irá cooperar (estratégia severa), a melhor resposta para o jogador 2 é também não cooperar, e assim sua recompensa será 0 daí em diante. Em outros termos, dado um fator de desconto δ, o valor presente da recompensa do jogador 2, no caso de ele não cooperar, será:

$$2 + 0\delta + 0\delta^2 + \ldots = 2$$

Uma alternativa para o jogador 2 seria adotar a mesma estratégia do jogador 1: cooperar se o jogador 1 coopera, não cooperar mais se, a qualquer momento, o jogador 1 não coopera. Nesse caso, é fácil para o leitor perceber que ambos os jogadores irão cooperar, o que determinará para o jogador 2 o valor presente das suas recompensas como sendo:

$$1 + \delta + \delta^2 + \ldots = \frac{1}{(1-\delta)}$$

Qual será, então, a melhor opção para o jogador 2? Se o valor presente das recompensas resultantes da adoção da estratégia severa também pelo jogador 2 for maior do que o valor presente resultante de o jogador 2 não cooperar, o jogador 2 não possui vantagem em se desviar do comportamento cooperativo.

Para que isso seja verdade é necessário que:

$$\frac{1}{(1-\delta)} > 2, \text{ ou } \delta > 1/2$$

Assim, se o fator de desconto for superior a ½ ou 0,5, dadas as recompensas do jogo, é mais vantajoso para o jogador 2 também adotar a estratégia severa, e assim agir cooperativamente com o jogador 1, do que agir de forma oportunista, explorando a cooperação do jogador 1 na primeira etapa. Logo, a menos que o fator de desconto seja realmente *muito* baixo, é mais vantajoso para os jogadores cooperarem do que tentarem trapacear, agindo de forma oportunista.

O leitor pode se certificar, sem muito esforço, de que a mesma argumentação que apresentamos para a hipótese de o jogador 2 não cooperar na primeira etapa vale também para o caso de o jogador 2 deixar de cooperar em *qualquer outra* etapa.

Com efeito, se o jogador 2 coopera até a etapa $t-1$ do jogo repetido, não cooperando na etapa t, há duas fases no jogo infinitamente repetido original: uma fase que vai da primeira etapa até a etapa $t-1$, que é caracterizada pelos dois jogadores cooperando em todas as jogadas, e outra fase que se inicia na etapa t, quando o jogador 2 decide não cooperar.

É fácil perceber que, para analisar se é vantajoso ou não para o jogador 2 não cooperar na etapa t, o que é realmente relevante é a segunda fase do jogo, que começa em t. *Antes disso não há interesse em analisar as recompensas do jogador 2, uma vez que elas não irão diferir da estratégia alternativa*, que é adotar a mesma estratégia do jogador 1 (a estratégia severa).

É importante que o leitor note que essa fase que se inicia na etapa t tem as mesmas características do jogo original, isto é, também é um jogo infinito, com as mesmas recompensas e possibilidades de estratégia do jogo original! Assim, é como se um outro jogo infinito, com as mesmas recompensas e possibilidades de estratégia do jogo original, se iniciasse na etapa t.

Assim, a comparação a ser feita agora, para identificar se vale a pena para o jogador 2 manter a cooperação naquele estágio, seria:

$$\frac{\delta^t}{(1-\delta)} > 2\delta^t$$

Assumindo que $0 < \delta \leq 1$, podemos simplificar a expressão anterior como sendo apenas:

$$\frac{1}{(1-\delta)} > 2$$

Ou seja, a mesma análise que desenvolvemos para determinar as circunstâncias em que seria mais interessante para o jogador 2 sustentar a cooperação! A conclusão é que, *se não é vantajoso para o jogador 2 não cooperar na primeira etapa, não o será também em nenhuma outra.*

Na verdade, o que fizemos foi analisar o comportamento de uma estratégia oportunista, por parte do jogador 2, em um *subjogo* que se inicia na etapa t do jogo original. Essa análise nos leva à seguinte definição de *subjogos em jogos infinitamente repetidos*:

Em jogos infinitamente repetidos, um **subjogo** começando em uma dada etapa do jogo t é o jogo repetido, o qual é jogado da etapa t em diante. Desse modo, em jogos infinitamente repetidos, cada subjogo que se inicia em uma determinada etapa é idêntico ao jogo original.

Como o leitor já deve ter percebido, da mesma forma que no caso dos jogos repetidos finitos, há tantos subjogos começando em uma dada etapa do jogo quantas sejam as possíveis histórias do jogo até aquela etapa.

Voltando ao problema do fator de desconto, um fator de desconto muito baixo (menor do que 0,5) poderia ser provocado por uma probabilidade muito pequena de o jogo continuar por mais uma etapa.

Uma outra causa para um fator de desconto muito baixo pode ser uma taxa de desconto (preferência temporal) muito elevada, significando que os jogadores valorizam muito pouco uma recompensa futura comparada com uma recompensa hoje. Por exemplo, os jogadores podem estar muito endividados ou possuírem uma renda tão pequena que a satisfação de suas necessidades mais urgentes supera em muito o interesse por ganhos de longo prazo.

Nesse último caso (taxa de desconto elevada), dizemos que os jogadores são muito **impacientes**. Isso nos leva a um resultado geral:

Em dilemas dos prisioneiros infinitamente repetidos, dadas as recompensas dos jogadores, se o fator de desconto for suficientemente elevado, isto é, se os jogadores forem suficientemente pacientes, a cooperação pode ser sustentada por meio da adoção de uma estratégia-gatilho por parte dos jogadores.

Vimos então que, para fatores de desconto que não sejam muito baixos, é possível esperar o desenvolvimento da cooperação, mesmo em jogos infinitamente repetidos cujo jogo-base tenha a mesma estrutura do dilema dos prisioneiros. Assim, a combinação de estratégias em que os dois jogadores adotam a estratégia severa e o resultado é (Coopera, Coopera) em todas as rodadas do jogo infinito representa um equilíbrio para o dilema dos prisioneiros infinitamente repetido.

Contudo, é importante perceber que também uma combinação de estratégias baseada exclusivamente no equilíbrio de Nash e que envolve os dois jogadores *não cooperando em todas as etapas* representa um equilíbrio perfeito em subjogos para um dilema dos prisioneiros infinitamente repetido. Com efeito, dado que o outro jogador nunca irá cooperar, o melhor que qualquer um dos dois jogadores pode fazer é não cooperar nunca, e nenhuma mudança nessa escolha, dado o que o outro jogador está fazendo, pode resultar em uma recompensa maior em nenhuma etapa do jogo.

Isso porque define-se um *equilíbrio perfeito em subjogos, para o caso de jogos infinitamente repetidos*, da seguinte forma:

Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um **equilíbrio perfeito em subjogos em jogos infinitamente repetidos** quando, para qualquer que seja a história do jogo até uma dada etapa, essas estratégias maximizam o valor presente das recompensas para os jogadores, daquela etapa em diante.

Vejamos se uma combinação de estratégias baseada na nossa estratégia-gatilho, a estratégia severa, obedece às condições anteriores para ser um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, no jogo do cartel infinitamente repetido.

Sabendo que os subjogos de um jogo infinitamente repetido são idênticos ao jogo original, temos que as histórias desses subjogos podem ser de dois tipos: ou os jogadores cooperaram até a etapa em que se inicia o subjogo ou houve não-cooperação em alguma das etapas que antecedem o início do subjogo. Analisemos cada um desses dois tipos de subjogos separadamente.

Se os jogadores vinham cooperando até o início do subjogo, a recomendação da estratégia severa é a de que eles continuem cooperando do início do subjogo em diante. Conforme vimos, essa é a opção que maximiza o valor presente da série de recompensas dos jogadores, a partir do início do subjogo, **desde que o fator de desconto seja suficientemente elevado.**

Assim, nenhum dos dois jogadores tem qualquer incentivo para desviar sua estratégia da estratégia severa nesse subjogo e, portanto, se o fator de desconto for suficientemente elevado, uma combinação de estratégias baseada na estratégia severa é um equilíbrio de Nash (uma estratégia severa é a melhor resposta a outra estratégia severa) para esse tipo de subjogo, ou seja, para essa história do jogo.

Vejamos agora o segundo tipo de subjogo, que representa a possibilidade de história do dilema dos prisioneiros repetido infinitamente em que um dos jogadores não cooperou am algum momento antes de se iniciar o subjogo. A recomendação da estratégia severa, nesse caso, é a de que os jogadores não cooperem, repetindo o equilíbrio de Nash do jogo-base, em que os dois jogadores não cooperam.

Também para essa possibilidade de história do jogo, a estratégia severa é a melhor resposta a ela mesma, pois se o outro jogador não está cooperando, o melhor a fazer é também não cooperar, para não ser explorado pelo jogador que agiu de forma oportunista. Segue-se que para esse segundo tipo de subjogo do dilema dos prisioneiros repetido infinitamente, a estratégia severa é a melhor resposta a ela mesma e, desse modo, também nesse caso a estratégia severa é um equilíbrio de Nash nesse tipo de subjogo.

Segue-se então que, por ser um equilíbrio de Nash em todos os subjogos (caso o fator de desconto seja suficientemente elevado), *a estratégia severa é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos do jogo do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido, sob a condição de que o fator de desconto seja suficientemente elevado.*

E quanto a uma combinação de estratégias que se baseasse no equilíbrio de Nash do jogo-base, isto é, que recomendasse não cooperar em todas as jogadas? Uma estratégia assim seria também um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos do jogo do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido?

Uma combinação de estratégias que se baseasse no equilíbrio de Nash do jogo-base, recomendando não cooperar em todas as jogadas, *também é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos*. Uma vez que um dos jogadores tenha decidido não cooperar, a melhor resposta possível do outro jogador, qualquer que tenha sido a história do jogo até ali, é também não cooperar. Por outro lado, se ambos os jogadores estão não-cooperando, nenhum jogador ganha passando a cooperar: ele apenas seria explorado pelo outro jogador.

Segue-se assim que o jogo do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido, com um fator de desconto suficientemente elevado, possui, *pelo menos*, dois equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos: um equilíbrio que consiste nos dois jogadores empregando a estratégia severa, e um equilíbrio que consiste nos dois jogadores não cooperando em nenhum momento do jogo infinitamente repetido.

Note, porém, que temos um desenvolvimento em relação às possibilidades do jogo repetido finito. Vimos nos jogos repetidos finitos que, caso o jogo-base possuísse apenas um equilíbrio de Nash, não haveria possibilidade de o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos ser diferente da repetição do equilíbrio de Nash em cada etapa do jogo. Agora, no jogo infinitamente repetido, mesmo que o jogo-base apresente apenas um equilíbrio de Nash, como no caso do dilema dos prisioneiros, há, *pelo menos*, uma alternativa.

Contudo, serão esses os dois únicos resultados possíveis? A resposta é *não*. Isso ficará evidente quando discutirmos o chamado teorema popular.

HÁ MUITAS POSSIBILIDADES DE COOPERAÇÃO

Para podermos analisar os possíveis resultados no nosso jogo do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido, precisamos introduzir um conceito que será muito útil, o conceito de *recompensas factíveis no jogo-base*. Antes de discutirmos esse conceito, contudo, precisamos conhecer um outro conceito, o conceito de **recompensa média descontada**.

De uma forma geral, se um jogador recebe a cada jogada uma recompensa no valor *constante a*, na forma da série infinita:

$$a + a + a + \ldots$$

e o fator de desconto é δ, conforme vimos, a soma S do valor presente dessa série é dada por:

$$S = a + a\delta + a\delta^2 + \ldots = \frac{a}{1-\delta}$$

Vamos estabelecer agora uma relação entre uma série infinita de recompensas de valor constante e qualquer série infinita de recompensas em que o jogador não receba sempre o mesmo valor. Suponha uma série infinita de recompensas representada por:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

Em que, ao contrário da série de recompensas $a + a + a + \ldots$, os valores de $v_1, v_2, v_3, \ldots$ não são todos iguais. Vamos representar *a soma descontada da série de recompensas* $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ por V.

Para que o jogador seja indiferente entre $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ e $a + a + a + \ldots$, é preciso que *as duas séries de recompensas, quando trazidas a valor presente, sejam iguais*, ou seja:

$$V = S$$

Se as duas séries de recompensas, quando trazidas a valor presente, resultam no mesmo valor de recompensas, não há razão para que um jogador prefira hoje uma série de recompensas à outra.

Vimos anteriormente que a soma descontada de $a + a + a + \ldots$ é $S = \dfrac{a}{1-\delta}$.

Segue-se então que, se $a + a + a + \ldots$ é uma série de recompensas em relação à qual o jogador é indiferente quando comparada a $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, então $V = S$ e, portanto:

$$\frac{a}{1-\delta} = V$$

Ou:

$$a = V(1 - \delta)$$

Podemos assim chamar tanto a como $V(1-\delta)$ *de* **recompensa média descontada** da série de recompensas $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$.

Esse é um resultado muito útil, pois nos permite desenvolver a análise do resultado de combinações de estratégias em jogos repetidos *considerando apenas o valor da média descontada das séries de recompensas, em vez de termos de trabalhar com as próprias séries*. Assim, por exemplo, basta multiplicarmos o valor presente de uma série infinita de recompensas por $(1 - \delta)$, para obtermos o valor médio dessas recompensas por período.

Para entender esse conceito, considere a representação que fizemos em um gráfico cartesiano do nosso jogo do dilema dos prisioneiros da Figura 7.3, na Figura 7.10 a seguir:

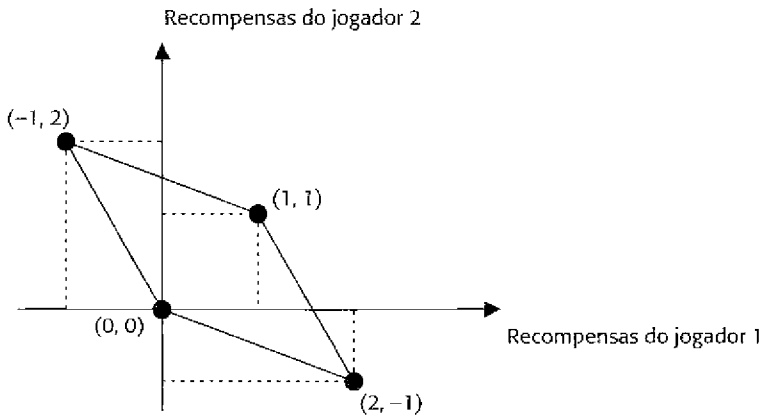


Figura 7.10 Vetores Factíveis do Dilema dos prisioneiros

Na Figura 7.10 temos as recompensas do jogo-base do dilema dos prisioneiros na forma de *vetores*: temos o vetor (1, 1), que corresponde à combinação de estratégias puras (Coopera, Coopera) no jogo-base; o vetor (–1, 2), que corresponde à combinação (Coopera, Não Coopera); o vetor (2, –1), que corresponde à combinação (Não Coopera, Coopera); e, finalmente, o vetor (0, 0), que corresponde à combinação (Não Coopera, Não Coopera).[8]

O leitor também deve ter notado que ligamos os pontos que correspondem às recompensas das estratégias puras adotadas pelos dois jogadores, formando um paralelogramo. Isso porque qualquer vetor de recompensas nas bordas, ou no interior do paralelogramo, pode ser obtido como uma *média ponderada* das recompensas dos jogadores no jogo-base do dilema dos prisioneiros.

Os vetores de recompensas assim obtidos, isto é, como médias ponderadas (em que a soma dos pesos é igual a 1) das recompensas das estratégias puras no jogo-base, são chamados de **vetores factíveis do jogo-base**. Obviamente, os próprios vetores que representam as recompensas das estratégias puras, (1, 1), (2, –1), (–1, 2) e (0, 0), são, eles também, vetores factíveis do jogo-base: cada um deles pode ser obtido como o resultado de uma média ponderada em que o próprio vetor tem peso 1 e os demais, peso zero.

---

8 Sempre recordando que o primeiro componente do vetor corresponde à recompensa do jogador 1 e o segundo componente do vetor, à recompensa do jogador 2.

A importância dos vetores factíveis do jogo-base é que, se o fator de desconto for muito próximo de 1, *o conjunto das recompensas médias descontadas geradas por um jogo infinitamente repetido é aproximadamente igual ao conjunto de vetores factíveis do seu respectivo jogo-base*. Isso é válido para qualquer jogo na forma estratégica, e não apenas para o dilema dos prisioneiros.

Vamos ilustrar o que estamos querendo dizer com um exemplo. O vetor factível de recompensa (x, y) = (½, ½) encontra-se no interior do paralelogramo, como mostra a Figura 7.11. Portanto, devemos ser capazes de obtê-lo como uma média ponderada entre dois vetores de recompensas.

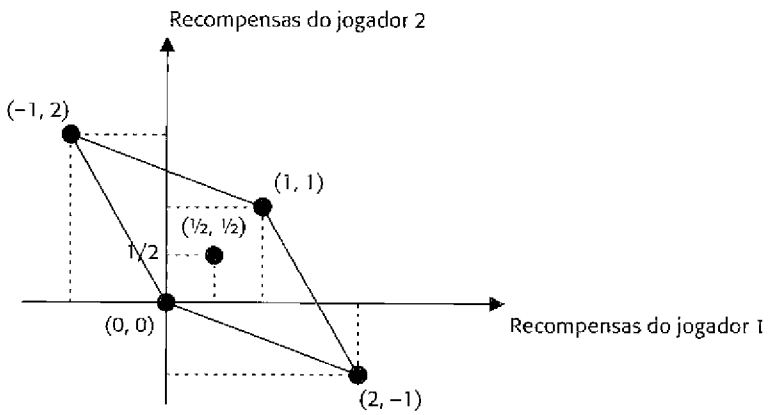


Figura 7.11 Um Vetor Factível no Dilema dos Prisioneiros

Suponha que os jogadores adotem uma estratégia em que ambos cooperam na primeira etapa, e daí por diante alternam (Não Coopera, Não Coopera) com (Coopera, Coopera), não cooperando nunca mais se o outro jogador rompe o combinado.[9] Essa combinação de estratégias produz uma série de recompensas idênticas para cada um dos jogadores, igual a:

$$1 + (0 \times \delta) + (1 \times \delta^2) + (0 \times \delta^3) + \ldots$$

Dessa forma, o valor presente dessas séries para cada um dos jogadores é idêntico e igual a:

$$\frac{1}{1-\delta^2}$$

9 Nos exercícios o leitor é convidado a calcular para que fator de desconto essa estratégia é um equilíbrio de Nash perfeito no jogo do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido que está sendo estudado.

Uma vez que se trata de uma progressão geométrica decrescente cujo termo inicial é 1 e a razão é δ^2. Conforme vimos anteriormente, para chegar à recompensa média descontada basta multiplicar a fração anterior por:

$$(1-\delta)$$

Como $(1-\delta^2) = (1-\delta)(1+\delta)$, temos que:

$$\frac{1}{1-\delta^2} \times (1-\delta) = \frac{1}{(1-\delta)(1+\delta)}(1-\delta) = \frac{1}{1+\delta}$$

Assim, a recompensa média descontada de cada jogador é dada por $1/(1+\delta)$. Se δ apresentar um valor muito próximo de 1, a recompensa média descontada de cada jogador estará muito próxima de ½, o valor que queríamos obter.

Na verdade, pode-se demonstrar que:

1. Para qualquer fator de desconto δ, com $0 < \delta < 1$, a recompensa média descontada de cada jogador em qualquer equilíbrio de Nash de um jogo infinitamente repetido cujo jogo-base é um dilema dos prisioneiros é, ao menos, a recompensa de (Não Coopera, Não Coopera).

2. Se (x, y) é um vetor factível de recompensas de um dilema dos prisioneiros, e as recompensas determinadas por (x, y) para os dois jogadores são estritamente maiores do que as recompensas determinadas pelo equilíbrio de Nash do dilema dos prisioneiros (que no jogo-base é (0, 0)), então existe um fator de desconto δ, com $\delta < 1$, para o qual (x, y) representa as recompensas médias descontadas dos dois jogadores em um equilíbrio de Nash perfeito no jogo infinitamente repetido.

3. Para qualquer fator de desconto δ, com $0 < \delta < 1$, o jogo infinitamente repetido do dilema dos prisioneiros possui um equilíbrio de Nash perfeito em que a recompensa média descontada dos jogadores é dada pela repetição da combinação de estratégias (Não Coopera, Não Coopera).

As três proposições anteriores compõem uma das versões do **teorema popular**. Essas proposições são conhecidas como teorema popular devido ao fato de que os teóricos de jogos têm ciência delas há muito tempo, mas ninguém tem certeza de quem as formulou pela primeira vez. Vejamos o sentido de cada uma dessas três proposições.

A primeira proposição afirma apenas que qualquer equilíbrio de Nash do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido, qualquer que seja o fator de desconto, tem de garantir uma recompensa média descontada pelo menos igual ao que os jogadores poderiam obter se jogassem (Não Coopera, Não Coopera), pois um equilíbrio de Nash deve garantir aos jogadores pelo menos o patamar mínimo que eles podem obter no jogo, que é a recompensa obtida por nunca cooperar.

A segunda proposição afirma que, dada uma recompensa média descontada, representada por um vetor factível que possui recompensas maiores do que o vetor factível que corresponde a (Não Coopera, Não Coopera), haverá um fator de desconto de forma que esse vetor factível com recompensas maiores do que (Não Coopera, Não Coopera) represente um equilíbrio de Nash perfeito no jogo do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido.

Aqui é preciso ter cuidado. Essa proposição não afirma que qualquer combinação de estratégias que resulte em uma recompensa média descontada, representada por um vetor factível, superior às recompensas de (Não Coopera, Não Coopera) é, necessariamente, um equilíbrio de Nash perfeito no dilema dos prisioneiros infinitamente repetido.

Para esclarecer o que estamos querendo dizer, considere uma combinação de estratégias em que os dois jogadores cooperassem na primeira jogada, e passassem a não mais cooperar a partir daí. Ou seja, teríamos uma sucessão de (Coopera, Coopera), (Não Coopera, Não Coopera), (Não Coopera, Não Coopera)... E assim por diante.

Qualquer que seja o fator de desconto, é fácil perceber que essa combinação de estratégias resulta em uma recompensa média descontada para os jogadores, a qual é maior do que a que eles teriam se nunca cooperassem. Isso porque, na estratégia anterior, eles cooperam pelo menos na primeira vez, o que resulta em uma recompensa de 1 na primeira rodada (seguida de 0 daí por diante).

Mas essa combinação de estratégias não é um equilíbrio de Nash. Um jogador que se desviasse dessa estratégia, não cooperando na primeira jogada, aumentaria sua recompensa de 1 para 2, sem que o outro jogador nada pudesse fazer para reduzir as recompensas do jogador não-cooperativo: a própria estratégia prevê a não-cooperação a partir da segunda rodada.

A terceira proposição apenas nos recorda o fato, já discutido anteriormente, de que, se os dois jogadores repetirem o equilíbrio de Nash do jogo-base do dilema dos prisioneiros infinitamente repetido, este também será um equilíbrio de Nash perfeito nesse jogo.

Voltando ao gráfico da Figura 7.10, reproduzido na Figura 7.12, toda a região hachurada corresponde aos equilíbrios que seriam possíveis, desde que o fator de desconto não fosse muito diferente de 1:

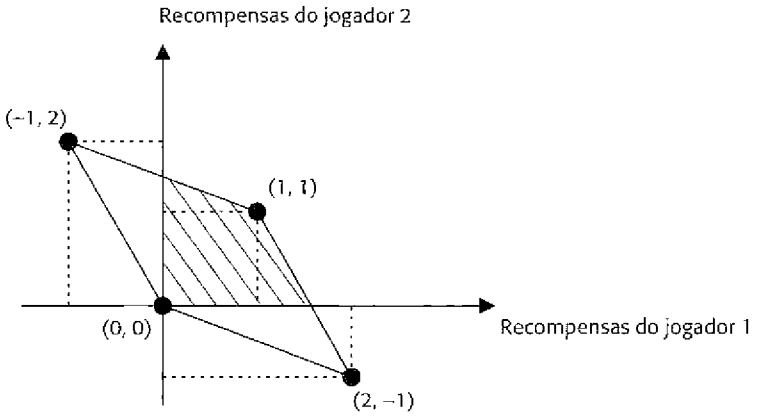


Figura 7.12 Os Equilíbrios Possíveis do Dilema dos Prisioneiros Infinitamente Repetido (Teorema Popular)

Apesar da discussão algo técnica, esse resultado é importante na medida em que ele nos mostra que, caso os jogadores sejam suficientemente pacientes, há um número infinito de estratégias que combinam cooperação em maior ou menor grau, e que podem compor equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos.

Nos livramos, assim, do mundo egoísta e ineficiente de Pareto do dilema dos prisioneiros se permitirmos que os jogadores interajam sem ter certeza acerca de quando será o fim da interação e se eles não forem impacientes. Contudo, ao mesmo tempo, há que reconhecer o fato de que, uma vez superado um patamar tão baixo, as possibilidades de cooperação são múltiplas, complexas, e não podem ser analisadas de forma simplista.

DE VOLTA AO PROBLEMA DA ESTABILIDADE DOS CARTÉIS

Vamos retomar a questão da estabilidade dos cartéis, para investigar se agora é possível encontrar uma resposta mais positiva para esse problema, pela possibilidade de as empresas envolvidas retaliarem comportamentos não-cooperativos (desde que o horizonte do setor em que elas se encontram seja, obviamente, de estabilidade).

Vamos supor então duas empresas, que adotem simultaneamente a seguinte estratégia: produzir metade da quantidade de monopólio no primeiro período, a partir daí continuar a produzir essa mesma quantidade se a outra empresa fizer o mesmo, caso contrário produzir daí por diante o nível de produção do equilíbrio de Cournot.

Sob que condições podemos esperar que essa combinação de estratégias seja um equilíbrio perfeito no jogo do cartel infinitamente repetido? Ou, em outras palavras, sob que condições podemos esperar que o cartel tenha sucesso?

Vamos chamar o lucro de cada empresa i (com $i = 1,2$) produzindo a quantidade determinada pelo cartel de π^i_m, e o lucro da cada empresa produzindo a quantidade determinada pelo modelo de Cournot de π^i_c. Como vimos no início deste capítulo:

$$\pi^i_m > \pi^i_c$$

Mas temos de considerar também o lucro que uma empresa pode ter se não cooperar com o cartel, enquanto a outra coopera. Vamos chamar esse lucro para a empresa i de π^i_{NC}. Segue-se então que:

$$\pi^i_{NC} > \pi^i_m > \pi^i_c$$

Desse modo, se a empresa obedece ao cartel, supondo que a outra também o faça, suas recompensas serão de:

$$\pi^i_m + \delta\pi^i_m + \delta^2\pi^i_m + \ldots$$

E o valor descontado dessa série de recompensas será de:

$$\frac{\pi^i_m}{1-\delta}$$

Por outro lado, se a mesma empresa não obedece ao cartel na primeira etapa, supondo ainda que a outra mantenha a cooperação na primeira etapa, suas recompensas serão de:

$$\pi^i_{NC} + \delta\pi^i_c + \delta^2\pi^i_c + \ldots$$

E o valor descontado dessa série de recompensas será de:

$$\pi^i_{NC} + \frac{\delta\pi^i_c}{1-\delta}$$

O cartel, assim, conseguirá se sustentar apenas se:

$$\frac{\pi^i_m}{1-\delta} > \pi^i_{NC} + \frac{\delta\pi^i_c}{1-\delta}$$

Ou, escrito de outra forma:

$$\delta > \frac{\pi^i_{NC} - \pi^i_m}{\pi^i_{NC} - \pi^i_c}$$

Essa é a condição para que o cartel consiga se sustentar, caso as empresas adotem uma estratégia-gatilho, tal como a estratégia severa. Note-se que se trata de uma condição para a cooperação espontânea, pois é determinada exclusivamente pelos ganhos das empresas em cada situação, *vis-à-vis* sua impaciência (representada pelo fator de desconto δ).

EXERCÍCIOS

7.1 Considere o jogo do cartel da Figura 7.1. Suponha que esse jogo é o jogo-base de um jogo repetido em dois estágios. Pede-se:

a. Representar os subjogos desse jogo repetido finito na forma estratégica.

b. Resolver esse jogo encontrando o equilíbrio perfeito.

7.2 Considere novamente o jogo da coordenação de cadeia produtiva da Figura 7.7. Mostre que a indústria automobilística não tem nenhum incentivo para se desviar da estratégia em que solicita a peça em liga especial pela entrega urgente no primeiro período e, se esse resultado efetivamente se materializa na primeira etapa, pede a mesma peça pela entrega rápida no segundo período; caso contrário, pede a peça em aço comum pela entrega normal.

7.3 Considere o jogo da Figura 7.7, em que alteramos ligeiramente a recompensa da indústria automobilística:

	Fornecedor		
Empresa Automobilística	**Entrega Urgente**	**Entrega Normal**	**Entrega Rápida**
Peça em Liga Especial	4, 3	0, 0	1, 5
Peça em Aço Comum	0, 1	2, 2	0, 1

Nesse caso, com essa ligeira alteração na recompensa da indústria automobilística (relativa à combinação de ações (Peça em Liga Especial, Entrega Rápida) no jogo-base), se você fosse o fornecedor, acreditaria na estratégia anunciada pela indústria automobilística e entregaria a peça em liga especial no primeiro período pela entrega urgente? Justifique sua resposta.

7.4 Suponha, como foi visto no texto deste capítulo, que os jogadores adotem uma estratégia em que ambos cooperam na primeira etapa, e daí por diante alternam (Não Coopera, Não Coopera) com (Coopera, Coopera), não cooperando nunca mais se um dos jogadores rompe o combinado. Calcule o fator de desconto para o qual essa combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash perfeito no dilema dos prisioneiros que foi estudado.

7.5 Considere a estratégia que é conhecida no jargão de teoria dos jogos como estratégia *Pavlov*, em uma homenagem (irônica?) ao cientista russo, Prêmio Nobel de Medicina em 1904, Ivan Petrovich Pavlov (1849-1936), que realizou estudos acerca de reflexos condicionados em cães. A estratégia Pavlov consiste em escolher cooperar no primeiro período do jogo infinitamente repetido do dilema dos prisioneiros e, a partir daí, escolher cooperar se o resultado do período anterior for (Coopera, Coopera) ou (Não Coopera, Não Coopera), esco-

lhendo não cooperar em qualquer outro caso. Por esse motivo, essa estratégia também é conhecida como "ganhou-continue-perdeu-mude". Construa a representação da estratégia de Pavlov em um diagrama.

7.6 Seja um jogo infinitamente repetido, em que o jogo base é do tipo dilema dos prisioneiros com as recompensas descritas a seguir:

	Jogador B	
Jogador A	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	3, 3	0, 5
Não Coopera	5, 0	1,1

Pede-se: calcular o valor do fator de desconto para o qual é vantajoso para os jogadores adotar a estratégia severa.

7.7 Encontre o fator de desconto para o jogo infinitamente repetido do exercício anterior, que torne a estratégia "olho-por-olho" um equilíbrio de Nash desse jogo (veja o Box 7.1 para uma definição da estratégia olho-por-olho, ou *tit-for-tat*).

7.8 Encontre o fator de desconto para o qual o cartel da Figura 7.1 se estabiliza, caso os jogadores decidam adotar a estratégia severa.

7.9 Seja um setor em que, caso formem um cartel, cada empresa terá um lucro de $ 1.600. Se optarem por competir entre si, o lucro que cada empresa obterá aplicando-se o modelo de Cournot será de $ 1.200. Caso uma das empresas decida desobedecer o cartel enquanto as demais obedecem, essa empresa que desobedeceu obterá um lucro de $ 2.000. Qual deverá ser o valor do fator de desconto, para que as empresas obedeçam ao cartel, supondo que elas adotem a estratégia severa?

7.10 Desenhe um gráfico como o da Figura 7.12, assinalando os equilíbrios possíveis do jogo infinitamente repetido do exercício 7.6.

8

Jogos Simultâneos de Informação Incompleta: Desenho de Leilões

A dúvida não é uma condição agradável, mas a certeza é absurda.

VOLTAIRE (PSEUDÔNIMO DE FRANÇOIS MARIE AROUET), FILÓSOFO E HUMANISTA FRANCÊS (1694-1778)

INTRODUÇÃO

Até aqui, supusemos que os jogadores se conheciam mutuamente, em um sentido muito preciso: cada jogador conhecia os objetivos dos demais jogadores, e qual a importância relativa que eles concediam a seus objetivos, o que era representado pelas suas recompensas. Assim, ao conhecer as estratégias à disposição dos jogadores e as recompensas que elas produzem, dadas as estratégias escolhidas pelos jogadores, conhecemos as características dos jogadores.

O problema é que o desconhecimento das características dos jogadores não apenas é muito comum na economia e na política como pode ter consequências muito sérias para o funcionamento da economia, para a atuação das empresas, para a elaboração de acordos políticos etc.

Um exemplo típico disso é quando uma empresa tem de organizar uma rede de subcontratação. Esse tipo de rede pode assumir proporções realmente gigantescas: multinacionais da área de equipamento e material esportivo chegam a subcontratar até 200 empresas, a maior parte delas em países asiáticos, com cultura e regulamentações muito diferentes não apenas do país-sede da multinacional que os está subcontratando, mas também entre si.

As consequências dessa diversidade e do desconhecimento não tardaram a surgir: a regulamentação frouxa de alguns países asiáticos, especialmente no que diz respeito aos aspectos sociais e ambientais da atividade empresarial, terminou por repercutir negativamente na reputação das empresas multinacionais

que utilizam essa vasta cadeia de fornecedores subcontratados, especialmente empresas de artigos esportivos.

Desse modo, denúncias de maus-tratos aos trabalhadores, regimes de trabalho semiescravos em condições desumanas (as chamadas *sweathouses*), e trabalho infantil acabaram afetando negativamente a imagem de algumas empresas, levando os consumidores dos países desenvolvidos (seu principal mercado) a promoverem boicotes aos seus produtos.

Esse tipo de problema pode ser estudado com o auxílio da teoria dos jogos. Para isso, considere que há dois jogadores: a empresa multinacional de artigos esportivos e seu potencial fornecedor em um país do Terceiro Mundo. A empresa multinacional possui duas alternativas: subcontratar o fornecedor ou realizar ela mesma uma dada etapa da produção de seu produto.

Se a multinacional subcontrata o fornecedor do país do Terceiro Mundo há uma significativa economia de custos em potencial: como o fornecedor realiza o mesmo tipo de tarefa para multinacional em questão e muitas outras empresas, o fornecedor pode se aproveitar de economias de escala e de escopo,[1] cobrando um preço mais baixo do que custaria à multinacional realizar, ela mesma, essa etapa da produção, além, é claro, do fato de que a mão-de-obra nesses países é mais barata do que nos países desenvolvidos.

O problema é que essa economia pode custar caro: um fornecedor que não respeite os seus trabalhadores, contratando crianças, castigando, desrespeitando o meio ambiente etc. provavelmente terá custos mais baixos, porém trará prejuízo à multinacional em termos de sua reputação.

Como saber, portanto, ao negociar o preço com o fornecedor de um país do Terceiro Mundo, se ele aceita preços mais baixos porque possui economias de escala e de escopo significativas ou porque explora seus trabalhadores e não respeita o meio ambiente? Obviamente, não há como estar absolutamente seguro quanto a isso: dada a extensão que as redes de fornecedores podem atingir, visitar todos os fornecedores, nos países em que eles se encontram, seria algo absurdamente caro.

Assim, embora não seja possível estar absolutamente certo, ao subcontratar um fornecedor, quanto às suas características, é possível, por outro lado, ter uma estimativa bastante adequada dos *riscos* de se contratar um fornecedor em um dado país. Essa estimativa pode ser um guia muito útil para minimizar o

1 Diz-se que uma determinada atividade econômica possui economias de escala quando a ampliação da escala de produção (isto é, o aumento na quantidade de todos os fatores de produção) reduz o custo total por unidade produzida (ou seja, seu custo médio). Diz-se que há economias de escopo quando a atuação da empresa em um ramo de atividade gera redução de custos em outra atividade (basicamente porque as duas atividades compartilham o uso dos mesmo fatores de produção).

custo esperado[2] da decisão de subcontratar um fornecedor no Terceiro Mundo, de forma a orientar as decisões estratégicas da empresa multinacional.

Vamos ilustrar o que estamos querendo dizer, considerando inicialmente a negociação da empresa multinacional com um fornecedor que seja socialmente (e ambientalmente) responsável, na forma estratégica a seguir:

Fornecedor Responsável Socialmente	Empresa Multinacional	
	Contrata	Não Contrata
Age Responsavelmente	2, 2	0, −1
Age Irresponsavelmente	−1, −2	−1, 0

Figura 8.1 (a) O Jogo da Subcontratação com Fornecedor Responsável Socialmente

É evidente na forma estratégica da Figura 8.1 (a) que é mais interessante para o fornecedor agir responsavelmente em qualquer situação, seja ou não contratado: essa estratégia para o fornecedor é estritamente dominante na forma estratégica da Figura 8.1 (a).

Isso pode resultar do fato de que, possuindo economias de escala e de escopo, o fornecedor pode oferecer um preço mais baixo e, assim, vender uma maior quantidade para a empresa multinacional com menores custos, ao mesmo tempo em que a legislação social e ambiental do país em questão é efetivamente aplicada por autoridades idôneas e comprometidas com o respeito à lei. Essa última hipótese explicaria por que, mesmo que não seja contratado pela empresa multinacional, o fornecedor é penalizado se agir com irresponsabilidade social.

Considerando a situação da empresa multinacional, se ela deixa de contratar um fornecedor responsável socialmente, tem um prejuízo (no valor de 1 milhão de dólares, conforme indicado na célula inferior esquerda da forma estratégica da Figura 8.1 (a)), resultante do fato de que é obrigada a realizar essa etapa da produção ela mesma, o que aumenta seus custos desnecessariamente.

O prejuízo para a empresa multinacional seria nulo, por outro lado, se ela deixasse de contratar um fornecedor que agisse de forma social e ambientalmente irresponsável, e significativo se ela contratasse um fornecedor socialmente e ambientalmente irresponsável. É fácil ver que o jogo da Figura 8.1 (a) possui um único equilíbrio de Nash, que é dado por (Contrata, Age Responsavelmente).

---

2 O valor esperado de uma variável que pode assumir vários valores é a soma dos valores que essa variável pode assumir, ponderados pelas suas probabilidades. Assim, se a receita de uma venda pode ser de 100 reais com 90% de chances e de 90 reais com 10% de chances, o valor *esperado* da venda é de: 100(0,9) + 90(0,1) = 90 + 9 = 99 reais.

O problema, contudo, é que quando o preço oferecido pelo fornecedor em uma negociação é baixo, a empresa multinacional não sabe se esse preço baixo resulta de economias de escala e de escopo ou apenas de um comportamento socialmente irresponsável. No segundo caso, a situação de interação estratégica é descrita na forma estratégica na Figura 8.1 (b):

Fornecedor Irresponsável Socialmente	**Empresa Multinacional**	
	Contrata	**Não Contrata**
Age Responsavelmente	−1, 2	0, −1
Age Irresponsavelmente	2, −2	1, 0

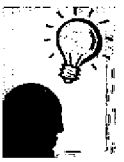
Figura 8.1 (b) O Jogo da Subcontratação com Fornecedor Irresponsável Socialmente

No jogo da Figura 8.1 (b), as diferenças em relação ao jogo da Figura 8.1 (a) dizem respeito às recompensas do fornecedor. Agora, para o fornecedor, agir responsavelmente é uma *estratégia estritamente dominada*: é sempre pior respeitar seus trabalhadores e o meio ambiente.

Isso porque, desrespeitando os direitos de seus empregados e as regras de proteção social, o fornecedor realiza ganhos, mesmo que a empresa multinacional não o contrate (talvez porque o desrespeito ao meio ambiente e aos direitos dos trabalhadores seja a única forma de manter sua competitividade em relação aos concorrentes).

Como o leitor poderá constatar, o jogo da Figura 8.1 (b) possui um equilíbrio de Nash estrito: (Não Contrata, Age Irresponsavelmente). Ou seja, não importa o que proponha o fornecedor, a melhor resposta para a empresa multinacional é não contratar.

O problema da empresa multinacional é justamente identificar em qual dos dois jogos ela se encontra! Se ela se encontra no jogo da Figura 8.1 (a), não há dúvida sobre que decisão tomar: aceitar a oferta do fornecedor e contratar, aproveitando-se do preço baixo que é oferecido. Por outro lado, se a empresa multinacional se encontra no jogo da Figura 8.1 (b), também não há dúvidas sobre que decisão tomar: o fornecedor não deve ser contratado, seja qual for a sua oferta. Mas, se a empresa multinacional não sabe a verdadeira característica do fornecedor, qual deve ser sua decisão? Este tipo de jogo é conhecido como jogo de **informação incompleta**:



Um jogo é dito de **informação incompleta** quando as características dos jogadores não são de conhecimento comum, o que tem consequências sobre as recompensas dos jogadores, uma vez que é por meio dessas recompensas que expressamos, em jogos, a natureza dos jogadores.

É esse tipo de problema que vamos estudar agora. Estudaremos inicialmente como tratar o fato de que o fornecedor pode ser dos dois tipos apresentados nas Figuras 8.1 e 8.2.

O EQUILÍBRIO DE NASH BAYESIANO

Coube a John C. Harsanyi (1920-2000) reelaborar o conceito de Nash, de forma a adequá-lo à modelagem desse tipo de interação estratégica, em que as características dos jogadores não são de conhecimento comum. Para entender a reelaboração de Harsanyi do conceito de Nash, necessitamos antes nos familiarizar com a forma pela qual devem ser tratados fenômenos *aleatórios*.

Nem todos os fenômenos observados são eventos certos. Existe uma gama muito diversificada de eventos na economia que possui caráter aleatório. Se a demanda em um determinado mercado varia de mês a mês, assumindo valores que oscilam dentro dos limites de um intervalo (por exemplo, entre 5,5 e 5,7 milhões de reais), a forma correta de modelar essa demanda é como um fenômeno aleatório.

É fácil perceber que muitos fenômenos importantes na economia e nas empresas possuem caráter de fenômenos aleatórios. Produção, assim como nível de preços e taxa de câmbio, flutuam de forma que nem sempre é possível prever com exatidão. Do mesmo modo, é muito difícil para uma empresa que investe em pesquisa e desenvolvimento de novos produtos prever exatamente quando um novo produto estará em condições de ser lançado no mercado. Os exemplos de incerteza associada aos fenômenos econômicos e do mundo empresarial poderiam ser multiplicados indefinidamente.

O melhor que se pode fazer, nesses casos, é construir uma *distribuição de probabilidades*, isto é, associar aos vários eventos possíveis a probabilidade de que eles efetivamente ocorram. Por exemplo, pode-se estimar que a probabilidade de um dado remédio chegar ao mercado ainda esse ano, dado o desenvolvimento das pesquisas, é de 30%, ou que a probabilidade de uma empresa não honrar seus empréstimos é de 5%.

As hipóteses usualmente adotadas em relação às probabilidades são de que seus valores variam entre zero e um (nos exemplos anteriores, a probabilidade de o remédio chegar ao mercado antes do fim do ano é de 0,3, e a probabilida-

de de a empresa não honrar os seus empréstimos é de 0,05), e de que a soma de todas as probabilidades de todos os eventos possíveis tem de ser igual a 1 (em outras palavras, essa soma tem de ser igual a 100%).[3]

Embora diferentes eventos possam, em princípio, se verificar, na realidade apenas *um* evento efetivamente irá se concretizar: no fim do ano saberemos se o remédio chegou ao mercado e ao fim do prazo do empréstimo saberemos se a empresa quitou seu débito. Emprega-se a expressão **estado da natureza** para descrever os eventos *efetivamente observados* em uma determinada situação que contém elementos aleatórios, em um dado momento.

Outro conceito importante é o do *valor esperado* de uma dada variável aleatória. O valor esperado de uma variável aleatória é o valor médio da variável, ponderado pelas suas probabilidades. Para entender o sentido desse conceito, considere, apenas como ilustração, que estamos estudando as receitas de um estaleiro em determinado ano, sabendo que um contrato está sendo negociado.

Suponha que o contrato, no valor de 1 milhão de reais (o valor é hipotético), é um contrato com um cliente de longa data e as negociações estão muito bem encaminhadas: a direção do estaleiro acredita que há uma probabilidade de 0,8 (ou 80%) de que o contrato seja assinado, e nesse caso o estaleiro teria uma receita total de 1 milhão, resultante do contrato, mais 1 milhão de contratos anteriores.

Se o contrato não for assinado, o estaleiro terá como receita apenas 1 milhão de reais dos contratos anteriores. Qual é a receita esperada do estaleiro no ano? A resposta é [(0,8) × 2 milhões] + [(0,2 × 1 milhão] = 1,8 milhão de reais.[4]

Feitas essas considerações, podemos retornar ao desenvolvimento do conceito de Nash por Harsanyi, para o caso em que os jogadores possuem informação incompleta. Adotando o método de Harsanyi, vamos supor que antes de a empresa multinacional e do fornecedor iniciarem sua negociação, um *pseudojogador*, a *Natureza*, faz a escolha do tipo do fornecedor (se o fornecedor é do tipo que possui responsabilidade social ou do tipo que não possui responsabilidade social).

A escolha acerca da característica do fornecedor é atribuída, dessa forma, a um **pseudojogador**, isto é, um *jogador fictício*, que possui valor analítico apenas na medida em que representa o fato de a empresa multinacional não saber, exatamente, de que tipo é o fornecedor com quem está negociando. Sendo um

---

3 Se há apenas dois eventos, "o remédio chega ao mercado antes do fim do ano" e "o remédio não chega ao mercado antes do fim do ano", o fato de que a probabilidade do primeiro evento é de 0,3 significa que a probabilidade de o remédio não chegar ao mercado até o fim do ano é de 1 – 0,3 = 0,7, ou 70%. Da mesma forma, a probabilidade de a empresa *honrar* seus créditos é de 1 – 0,05 = 0,95 ou 95%.

4 Note que o valor esperado não tem de ser um valor a ser efetivamente observado na realidade.

pseudojogador, a Natureza apenas interfere para *definir* os tipos dos jogadores, não lhe sendo atribuída nenhuma recompensa ao final do jogo.

Temos de examinar agora como a Natureza escolhe o tipo do fornecedor. A característica da Natureza, em qualquer jogo de informação incompleta, é fazer escolhas aleatórias com *probabilidades predeterminadas*, em determinados momentos do jogo. Desse modo, a Natureza escolhe um tipo de fornecedor com uma dada probabilidade p e o outro tipo, obviamente, com probabilidade $(1 - p)$.

Também é importante a hipótese de que os jogadores compartilham uma **crença prévia comum** em relação à forma pela qual a Natureza faz sua escolha aleatória. Mais especificamente, essa hipótese significa que a probabilidade de cada tipo de fornecedor ser selecionado pela natureza é de conhecimento comum dos jogadores.

Embora normalmente, nesse tipo de jogo, admita-se a possibilidade de que um jogador possa inferir a probabilidade dos demais jogadores serem de determinado tipo a partir do seu *próprio* tipo, para efeito de simplificação iremos supor sempre que os tipos dos jogadores são independentes, de tal forma que nenhum jogador possa extrair informação sobre o tipo dos demais jogadores apenas por conhecer seu próprio tipo.

Como exemplo de uma situação em que o conhecimento de um jogador sobre seu próprio tipo revela informações sobre os tipos dos outros jogadores, considere um leilão de arte frequentado apenas por especialistas. Se um dos compradores avalia uma peça como sendo muito valiosa, ele sabe que os demais devem estar avaliando a peça em questão da mesma maneira. Contudo, para o nosso exemplo, não é razoável supor que o fato de a empresa multinacional conhecer suas práticas de respeito à mão-de-obra e ao meio ambiente revele alguma informação sobre seus potenciais fornecedores do Terceiro Mundo.

Estamos agora em condições de analisar o jogo da subcontratação. Nosso procedimento, de acordo com a sugestão de Harsanyi, envolverá duas etapas:

- Etapa 1: Iremos transformar nosso jogo de informação incompleta em um jogo de informação imperfeita.
- Etapa 2: Aplicaremos o conceito de equilíbrio de Nash a essa versão reformulada do jogo.

Etapa 1: Transformando o Jogo de Informação Incompleta em Jogo de Informação Imperfeita

Para transformar o jogo de informação incompleta em jogo de informação imperfeita, observe a Figura 8.2:

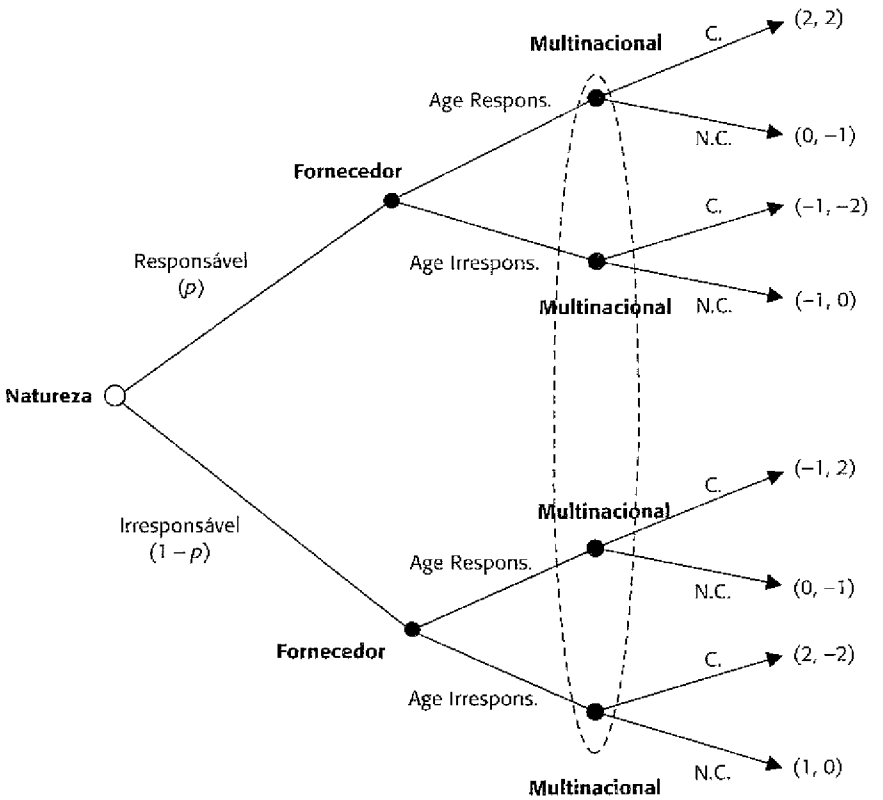


Figura 8.2 O Jogo da Subcontratação como Jogo de Informação Imperfeita, em Forma Estendida

Na Figura 8.2 temos a representação, em forma estendida, do jogo da subcontratação, após a transformação de jogo de informação incompleta em jogo de informação imperfeita. Na Figura 8.2 o leitor pode observar que a Natureza seleciona o fornecedor do tipo socialmente responsável com probabilidade p e o do tipo socialmente irresponsável com probabilidade $(1 - p)$. O leitor também deve observar que o nó que corresponde à Natureza é representado por um círculo "vazado", para indicar que se trata de um pseudojogador.

Após a Natureza ter selecionado o tipo do fornecedor, o tipo selecionado de fornecedor decide se irá agir com responsabilidade social ou não. Note que os nós em que o fornecedor tem de tomar sua decisão não pertencem a um mesmo conjunto de informação: isso significa que o fornecedor *sabe* qual é o seu tipo, após ter sido selecionado pela Natureza.

Contudo, na etapa seguinte do jogo, os nós em que a empresa multinacional decide acerca da contratação ou não do fornecedor pertencem todos ao mesmo conjunto de informação: isso significa que a empresa multinacional não sabe com qual tipo de fornecedor está negociando.

Podemos também representar o jogo da subcontratação da Figura 8.2 em forma estratégica. Antes disso, porém, temos de definir o que entendemos por estratégia nesse tipo de jogo de informação incompleta. Uma estratégia de um jogador em um jogo de informação incompleta simultâneo, do tipo que estamos estudando, especifica as ações disponíveis para cada jogador, *de acordo com o seu tipo*.

Assim, enquanto a empresa multinacional possui apenas duas opções, que são {Contratar} ou {Não Contratar} o fornecedor, as estratégias para o fornecedor são dadas pelos pares ordenados: (Age Responsavelmente, Age Responsavelmente), (Age Responsavelmente, Age Irresponsavelmente), (Age Irresponsavelmente, Age Responsavelmente) e (Age Irresponsavelmente, Age Irresponsavelmente).

Nos pares ordenados que representam as estratégias do fornecedor, o primeiro componente do par ordenado nos informa a estratégia a ser adotada pelo fornecedor caso ele seja do tipo socialmente responsável, e o segundo componente nos informa o tipo de estratégia a ser adotada pelo fornecedor caso ele seja do tipo socialmente irresponsável.

É importante aqui fazer uma distinção entre os pares ordenados que caracterizam as estratégias nos jogos sequenciais. Em jogos sequenciais, cada elemento do par ordenado corresponde a uma ação possível de *um mesmo jogador*, em um determinado momento do jogo em que ele tinha que decidir o que fazer. Aqui, *cada elemento do par ordenado corresponde a uma ação possível para cada tipo diferente de jogador.*

O leitor pode estar se perguntando qual é o sentido disso, se o fornecedor do Terceiro Mundo sabe exatamente de que tipo ele é. O problema, na verdade, não está no fornecedor, e sim na empresa multinacional, que tem de tomar sua decisão quanto a contratar ou não o fornecedor sem saber quem ele é.

Não sabendo a verdadeira característica do fornecedor, a empresa multinacional se vê obrigada a formar uma crença em relação às probabilidades de que o fornecedor seja de um ou de outro tipo. Assim, quando atribuímos duas ações possíveis para o fornecedor, de acordo com qual seja o seu tipo, o que estamos fazendo na verdade é incorporar e tornar explícita no jogo a crença da empresa multinacional em relação às probabilidades de que o fornecedor seja de um tipo ou de outro.

Estamos agora em condições de representar o jogo da Figura 8.2 em forma estratégica. Para simplificar a notação, vamos chamar as estratégias {Agir Responsavelmente} e {Agir Irresponsavelmente}, de cada tipo de fornecedor, de {AR} e {AI}, respectivamente. Também vamos chamar as decisões de contratar o fornecedor e não contratar o fornecedor, por parte da empresa multinacional, de {C} e {NC}, respectivamente.

Vamos, porém, por etapas, para evitar confusões. Assim, calculamos inicialmente apenas as recompensas dos fornecedores. Para isso, listamos, na Figura 8.3 (a), apenas as recompensas *dos fornecedores*, ponderadas pela probabilidade de cada tipo de fornecedor.

Considere, assim, a célula contendo recompensas na primeira linha à esquerda na tabela da Figura 8.3 (a): ela indica a recompensa ponderada dos fornecedores, dada a probabilidade de que a Natureza escolha o tipo socialmente responsável de fornecedor ou o tipo socialmente irresponsável, se ambos os tipos de fornecedores decidirem agir responsavelmente (a estratégia {AR, AR} dos fornecedores) e a empresa multinacional decidir contratar o fornecedor. Como chegamos à expressão $2p + (-1)(1 - p) = 3p - 1$?

Ações dos Fornecedores	Recompensa Ponderada dos Fornecedores Caso a Empresa Multinacional Contrate	Recompensa Ponderada dos Fornecedores Caso a Empresa Multinacional Não Contrate
AR, AR	$2p + (-1)(1 - p) = 3p - 1$	$0p + 0(1 - p) = 0$
AR, AI	$2p + 2\ (1 - p) = 2$	$0p + 1(1 - p) = 1 - p$
AI, AR	$-1p + (-1)(1 - p) = -1$	$-1p + (0)(1 - p) = -p$
AI, AI	$-1p + 2(1 - p) = -3p + 2$	$-1p + 1(1 - p) = -2p + 1$

Figura 8.3(a) Recompensas dos Fornecedores no Jogo da Subcontratação Ponderadas pela Probabilidade do Tipo de Fornecedor

Para entender como chegamos à expressão $2p + (-1)(1 - p) = 3p - 1$, o leitor deve examinar inicialmente a Figura 8.1 (a). Nela vemos que caso o fornecedor do tipo socialmente responsável escolha agir de forma responsável e a empresa multinacional o contrate, a recompensa do fornecedor será de 2.

Se, por outro lado, o fornecedor for na verdade do tipo socialmente irresponsável e decidir agir responsavelmente, podemos ver na Figura 8.1 (b) que, caso a empresa multinacional o contrate, a recompensa do fornecedor socialmente responsável será de –1. Se ponderarmos as duas recompensas, 2 e –1, pelas probabilidade de cada tipo de fornecedor e as somarmos, chegaremos à expressão $2p + (-1)(1 - p) = 3p - 1$. As demais expressões foram obtidas de forma análoga.

Temos que desenvolver um raciocínio análogo para a empresa multinacional. Assim, vamos calcular agora as recompensas da empresa multinacional. Para isso, listamos, na Figura 8.3 (b), apenas as recompensas *da empresa multinacional*, ponderadas novamente pela probabilidade de cada tipo de fornecedor.

Ações dos Fornecedores	Recompensa Ponderada da Empresa Multinacional Caso Contrate	Recompensa Ponderada da Empresa Multinacional Caso Não Contrate
AR, AR	$2p + 2(1 - p) = 2$	$-1p + [-1(1 - p)] = -1$
AR, AI	$2p + [-2(1 - p)] = 4p - 2$	$-1p + 0(1 - p) = -p$
AI, AR	$-2p + 2(1 - p) = -4p + 2$	$0p + (-1)(1 - p) = p - 1$
AI, AI	$-2p + (-2)(1 - p) = -2$	$0p + 0(1 - p) = 0$

Figura 8.3(b) Recompensas da Empresa Multinacional no Jogo da Subcontratação Ponderadas pela Probabilidade do Tipo de Fornecedor

Assim, como fizemos no caso dos fornecedores na Figura 8.3 (a), vamos entender como chegamos à expressão $2p + 2(1 - p) = 2$, na célula esquerda da primeira linha da Figura 8.3 (b). Novamente, o leitor deve examinar inicialmente a Figura 8.1 (a). Nela observamos que caso o fornecedor do tipo socialmente responsável escolha agir de forma responsável e a empresa multinacional o contrate, a recompensa da empresa multinacional será de 2.

Se, por outro lado, o fornecedor for na verdade do tipo socialmente irresponsável e decidir agir responsavelmente, podemos ver na Figura 8.1 (b) que, caso a empresa multinacional o contrate, a recompensa da empresa multinacional também será de 2. Obviamente, ponderando as duas recompensas, 2 e 2, pelas probabilidade de cada tipo de fornecedor e somando, chegaremos à expressão $2p + 2(1 - p) = 2$. As demais expressões foram obtidas de forma análoga.

A tabela com as recompensas na forma estratégica do jogo da Figura 8.2 se encontra na Figura 8.3 (c). Na Figura 8.3 (c) temos, como é usual em formas estratégicas, as recompensas dos fornecedores representadas na primeira expressão antes da vírgula e as recompensas da empresa multinacional representadas na segunda expressão após a vírgula:

Fornecedor	Empresa Multinacional	
	C	NC
AR, AR	$(3p - 1)$, 2	0, − 1
AR, AI	2, $(4p - 2)$	$(1 - p)$, $-p$
AI, AR	−1, $(-4p + 2)$	$-p$, $(p - 1)$
AI, AI	$(-3p + 2)$, − 2	$(-2p + 1)$, 0

Figura 8.3 (c) O Jogo da Subcontratação como Jogo de Informação Imperfeita em Forma Estratégica

As recompensas na tabela da Figura 8.3 (c) são as recompensas do fornecedor e da empresa multinacional, dada a probabilidade p de que a Natureza selecione um fornecedor socialmente responsável e a probabilidade $(1 - p)$ de que a Natureza selecione um fornecedor socialmente irresponsável.

A forma estratégica do jogo da subcontratação da Figura 8.3 é um exemplo de **forma estratégica bayesiana** e o jogo que ela representa um **jogo bayesiano simultâneo**. De um modo geral, um jogo bayesiano simultâneo, em sua forma estratégica, deve listar:

- As ações disponíveis para os jogadores.
- Os jogadores e seus possíveis tipos.
- As probabilidades associadas a cada tipo de jogador.
- As recompensas derivadas de cada combinação de tipo de jogador e estratégia.

Etapa 2: Aplicando o Conceito de Equilíbrio de Nash à Versão Reformulada do Jogo

Uma vez elaborada a forma estratégica de um jogo bayesiano simultâneo, podemos aplicar o conceito de equilíbrio de Nash, que assume então a denominação de **equilíbrio de Nash bayesiano**. Assim, temos que:

Um **equilíbrio de Nash bayesiano** é aquele em que a combinação de estratégias adotadas pelos jogadores maximiza as recompensas de cada jogador, dadas as estratégias dos demais jogadores, seus tipos e as probabilidades atribuídas aos tipos dos demais jogadores.

Vamos aplicar esse conceito de equilíbrio de Nash bayesiano ao nosso jogo da subcontratação. Na verdade, trata-se simplesmente de aplicar o conceito de equilíbrio de Nash à forma estratégica do nosso jogo bayesiano da Figura 8.3 (c). Contudo, para isso, primeiramente temos de saber qual é a probabilidade de que a Natureza selecione um fornecedor que age socialmente de forma responsável, e qual é a probabilidade de que a Natureza selecione um fornecedor que age de forma irresponsável.

Vamos supor que a empresa multinacional não tem a menor ideia das chances de que o seu fornecedor seja de um tipo ou de outro. Uma forma de expressar isso é considerar que há 50% de chances de que o fornecedor seja socialmente responsável e 50% de chances de que ele não seja.

Como a probabilidade tanto em um caso, como em outro, é a mesma, isso representa o fato de que a empresa multinacional não sabe se o fornecedor "tende" mais para um tipo do que para o outro. Que tipo de equilíbrio surgirá quando aplicarmos a noção de equilíbrio de Nash ao jogo bayesiano da Figura 8.3 (c)?

Veja o resultado na Figura 8.4. Ele foi obtido substituindo na forma estratégica da Figura 8.3 (c) o valor de p de 0,5 em cada uma das expressões que correspondem tanto às recompensas dos fornecedores quanto da empresa multinacional, dado que a empresa multinacional acredita que o fornecedor tanto pode ser de um tipo como de outro, ou seja, dado que, do ponto de vista das *crenças* da empresa multinacional, há chances iguais de se estar lidando com qualquer tipo de fornecedor.

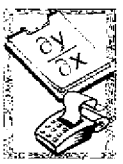
Fornecedor	Empresa Multinacional	
	C	NC
AR, AR	½ , 2	0, – 1
AR, AI	(l) 2, 0 (c)	½ , – ½
AI, AR	–1, 0	–½ , –½
AI, AI	½ , – 2	0, 0

Figura 8.4 O Jogo da Subcontratação como Jogo de Informação Imperfeita em Forma Estratégica

O leitor não terá qualquer dificuldade, acreditamos, para identificar o único equilíbrio de Nash do jogo bayesiano acima como sendo {(AR, AI), C}, assinalado com (l) de maior valor nas linhas e com (c) de maior valor nas colunas. Mesmo achando que seu fornecedor tanto pode ser de um tipo como de outro, as recompensas esperadas da empresa multinacional compensam os riscos e ela contrata seu fornecedor no Terceiro Mundo.

Obviamente, como o leitor deve estar pensando, esse resultado foi consequência não apenas das probabilidades atribuídas a cada tipo de fornecedor, mas também do valor das recompensas obtidas pela empresa multinacional, para cada tipo de fornecedor. Se as recompensas da empresa multinacional pelo emprego do fornecedor estrangeiro fossem menores, ou a punição por empregar um fornecedor irresponsável do ponto de vista social e ambiental fosse maior, talvez o equilíbrio de Nash bayesiano não fosse favorável à contratação do fornecedor.

Visto assim o conceito de equilíbrio de Nash bayesiano, abordaremos agora duas aplicações interessantes desse conceito. A primeira envolve uma reformulação do modelo de Cournot. A segunda diz respeito ao chamado problema do desenho de mecanismo e o princípio de revelação.



O MODELO DE COURNOT COM INFORMAÇÃO INCOMPLETA

Estudamos o modelo de Cournot no Capítulo 4. Vamos estudar agora uma versão diferente desse modelo, em que a Empresa 1 faz parte de uma população homogênea de empresas, em que todas empregam a mesma tecnologia e apresentam os mesmos custos, sendo esses custos de conhecimento comum.

Enquanto isso, a Empresa 2 pertence a uma população que se divide em dois grupos: um grupo de custos baixos, o outro, de custos altos. Essa é uma outra racionalização possível para o artifício de que a Natureza escolhe os jogadores com determinadas probabilidades: essas probabilidades representariam a parcela dos vários tipos de jogadores na população a que pertencem.

Vamos supor que, em função da composição da população, há 50% de chance de a Empresa 2 ser uma empresa de baixo custo e 50% de chance de a Empresa 2 ser uma empresa de custo alto.

Seja então um mercado compartilhado por essas empresas, a Empresa 1 e a Empresa 2. A função de demanda total nesse mercado é dada por:

$$p(Q) = 100 - q_1 - q_2$$

Se a Empresa 2 for uma empresa do tipo de baixo custo, sua função de custo será dada por:

$$C_2^B = 2q_2^B$$

Onde C_2^B é o custo da Empresa 2 de baixo custo, e q_2^B é a quantidade produzida por ela. Assim, sua função de recompensa, π_2^B, será dada por:

$$\pi_2^B = (100 - q_1 - q_2^B)\, q_2^B - 2q_2^B$$

Vejamos agora o caso do segundo tipo da Empresa 2, a empresa de alto custo. Caso a Empresa 2 seja do tipo que apresenta alto custo, sua função de custo será dada por:

$$C_2^A = 4q_2^A$$

Onde C_2^A é o custo da Empresa 2 de alto custo, e q_2^A é a sua produção. Assim, sua função de recompensa, π_2^A, será dada por:

$$\pi_2^A = (100 - q_1 - q_2^A)\, q_2^A - 4q_2^A$$

No que diz respeito à Empresa 1, da qual há apenas um tipo, sua função de custo será dada por:

$$C_1 = 2q_1$$

Onde C_1 é o custo da Empresa 1, e q_1 é a quantidade produzida pela Empresa 1.

Vejamos a função de recompensa da Empresa 1. Obviamente, como a produção da Empresa 2 afeta o preço de mercado e, dessa forma, a receita e o lucro da Empresa 1, a quantidade a ser produzida pela Empresa 2 tem de ser levada em consideração no momento de determinar a quantidade produzida pela Empresa 1, que é a melhor resposta à decisão da Empresa 2.

O problema, nesse caso, é que temos dois tipos de Empresa 2 para considerar. O que a Empresa 1 terá de fazer será considerar *os dois tipos* de competidor, ponderando o efeito que cada tipo pode ter sobre seus lucros pelas suas probabilidades, conforme demonstrado a seguir:

$$\pi_1 = (0,5)\ (100 - q_1 - q_2^A)\ q_1 + (0,5)\ (100 - q_1 - q_2^B)\ q_1 - 2q_1$$

Onde π_1 é a função de recompensa da Empresa 1. O procedimento agora, para a solução do modelo de Cournot, é o mesmo aplicado no Capítulo 4: tomamos as derivadas parciais $\partial\pi_1/q_1$, $\partial\pi_2/q_2^A$, e $\partial\pi_2/q_2^B$, e igualamos cada uma dessas derivadas a zero.[5] Ou seja, teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\pi_1}{\partial q_1} = (0,5)(100 - 2q_1 - q_2^A) + (0,5)(100 - 2q_1 - q_2^B) - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial\pi_2^A}{\partial q_2^A} = 100 - q_1 - 2q_2^A - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial\pi_2^B}{q_2^B} = 100 - q_1 - 2q_2^B - 2 = 0 \end{cases}$$

Após fazer as simplificações necessárias, e pondo então q_1, $q_2{}^A$ e $q_2{}^B$ em evidência, obtemos o seguinte sistema de três equações:

$$\begin{cases} q_2^A = \dfrac{96 - q_1}{2} \\ q_2^B = \dfrac{98 - q_1}{2} \\ q_1 = \dfrac{98 - 0,5(q_2^A + q_2^B)}{2} \end{cases}$$

5 Como sempre, condição de primeira ordem para a obtenção de um máximo.

Resolvendo esse sistema, o leitor não terá dificuldade em encontrar os valores de produção de cada empresa: $q_1 = 33$, $q_2^A = 31{,}5$ e $q_2^B = 32{,}5$.

É interessante notar o valor significativamente reduzido da produção da Empresa 1. Não sabendo ao certo o custo da Empresa 2, a Empresa 1 é obrigada a ajustar sua quantidade produzida pelo valor esperado de produção dos dois tipos de concorrentes, o que reduz sua quantidade.

Sabendo disso, a Empresa 2, se for do tipo de custo mais alto, pode aumentar sua própria produção. O leitor é convidado, na seção de exercícios, a explorar esse resultado.

Uma outra aplicação importante da análise de jogos de informação incompleta é a discussão de desenho de mecanismos. Com efeito, a análise dos mecanismos de desenho tem fornecido subsídios muito interessantes para leilões. Esse será nosso próximo assunto.

DESENHO DE MECANISMO

O leitor deve estar se perguntando, a essa altura da exposição, se a teoria dos jogos não poderia fornecer algum instrumento útil para o economista ou administrador que não está apenas interessado em analisar qual a melhor escolha diante de uma situação de interação estratégica, *mas que pode definir os termos da própria interação estratégica*.

Com efeito, não é incomum que um dos jogadores possa definir os termos em que um processo de interação estratégica irá se desenvolver, na economia ou no mundo empresarial. Quando o governo decide privatizar alguma de suas empresas, o governo é o vendedor, mas também é o agente que determina as regras do jogo, isto é, as regras da privatização.

Há vários outros exemplos, no mundo dos negócios e da economia, em que um agente pode definir as próprias regras do jogo. Um empresário que decide vender uma de suas empresas frequentemente também define os termos em que se desenvolverá a negociação com eventuais compradores. O Banco Central, nos seus leilões de títulos públicos, estabelece as próprias regras desses leilões. A teoria dos jogos pode contribuir para uma melhor compreensão de como essas regras devem ser estabelecidas.

Há um problema comum em todas as situações que descrevemos anteriormente, e em situações análogas: o fato de que alguns jogadores possuem *informação privada*, o que é essencial para que o jogador que define as regras consiga maximizar sua recompensa.

Diz-se que uma informação relevante para o jogo é **informação privada** quando ela não é do conhecimento de todos os jogadores.

Assim, quando se vai vender uma mercadoria, uma empresa ou um título do Banco Central, por exemplo, em geral não se conhece o valor que o comprador está disposto a pagar. Nesse caso, diz-se que o preço máximo que o comprador está disposto a pagar é informação privada do comprador.

O objetivo da discussão de desenho de mecanismos é analisar como as regras de um jogo, isto é, *o mecanismo*, deve ser elaborado, ou "desenhado", para que determinado objetivo seja alcançado. Independentemente do fato de que os jogadores vão sempre (por hipótese) fazer suas escolhas a partir de seu auto-interesse, um mecanismo desenhado convenientemente pode produzir resultados mais interessantes para quem tem a possibilidade de desenhar as regras do jogo.

Embora o jogador que possui o poder de desenhar o mecanismo tenha a liberdade de definir as regras do jogo, ele enfrenta duas restrições importantes:

- O jogador responsável pelo desenho do mecanismo não pode adotar *nenhuma coerção*: os jogadores envolvidos no mecanismo devem jogar de forma voluntária e de acordo com seus próprios interesses.
- As expectativas do jogador responsável pelo desenho do mecanismo devem ser *razoáveis*, no sentido de que os jogadores envolvidos no mecanismo *não* irão jogar algo que não seja um equilíbrio do mecanismo.

Em outras palavras, o processo de interação estratégica deve ser voluntário e o desenho do mecanismo terá de considerar o fato de que os jogadores irão se comportar *racionalmente*, dado o mecanismo. Todavia, ainda que sujeito a essas duas restrições, nosso jogador-desenhista tem liberdade suficiente para estipular regras que produzam melhores resultados, de seu ponto de vista.

Por sinal, nosso jogador-desenhista, em geral, é também um agente econômico. Nos exemplos anteriores, nosso jogador-desenhista era o governo, interessado na receita da privatização, o empresário visando ao maior valor de venda para sua empresa, ou o Banco Central, interessado em colocar seus títulos à venda pelo maior valor possível. Assim, o nosso jogador-desenhista tem também sua função de recompensa a maximizar, de acordo com o comportamento (voluntário e racional) dos demais jogadores.

Vamos ilustrar nossa discussão do desenho de mecanismo com um exemplo muito simples. Entre os exemplos que acabamos de citar, vamos imaginar que

um governo decidiu vender uma empresa pública e que apenas um comprador se qualificou em um processo prévio para a aquisição da empresa.

O governo não sabe de que tipo é o comprador, sabe apenas que ele pode ser de dois tipos: ou é do tipo que atribui um valor elevado à empresa que está sendo vendida (tipo de alta avaliação), ou é do tipo que atribui um valor baixo à mesma empresa (tipo de baixa avaliação). No jargão de jogos, dizemos que *os tipos de compradores da empresa pública são de conhecimento comum dos jogadores.*

De acordo com seu tipo, esse comprador pode estar disposto a pagar, de forma muito simplificada, dois valores pela empresa: o valor a (tipo de alta avaliação) ou o valor b (tipo de baixa avaliação), com $a > b > 0$.

Uma hipótese básica do jogo e que deriva da racionalidade do comprador, é que *o comprador buscará maximizar o excedente extraído na compra da empresa*, sendo que por excedente entende-se a diferença entre o valor que o comprador estaria disposto a pagar e o valor efetivamente pago.

Dado o valor pago pela empresa, representado por v, se o comprador é do tipo que valoriza muito a empresa à venda, ele extrairá um excedente igual a $(a - v)$, se ele for do tipo que valoriza pouco a empresa, o excedente que ele conseguirá extrair será $(b - v)$.

Da mesma forma que o comprador procura maximizar o excedente que extrai da compra, o governo procura vender a empresa pelo maior preço possível. O problema é que, enquanto o comprador conhece de que tipo é, o governo não sabe se o comprador é do tipo que atribui um valor a ou um valor b à empresa.

Assim, o governo atribui uma probabilidade p de que o comprador seja do tipo que atribui um valor alto à empresa (o valor a), e $(1 - p)$ de que ele seja do tipo que atribui um valor baixo à empresa (valor b). Como o governo deve estabelecer o valor da empresa de forma a obter o máximo de receita da venda?

Para tornar a discussão mais clara, no exercício que se segue, vamos atribuir valores aos parâmetros a, b e p. Vamos supor que $a = 30$ milhões, $b = 10$ milhões e $p = 0{,}5$. Obviamente os valores são totalmente simbólicos, e visam apenas a ilustrar a discussão que se segue.

Há duas possibilidades mais simples para o governo nesse jogo, e que acabam produzindo o mesmo resultado, do ponto de vista prático. A primeira é simplesmente perguntar ao comprador quanto ele está disposto a pagar pela empresa. A segunda é estabelecer um preço que o comprador, qualquer que seja o seu tipo, estará disposto a pagar.

No primeiro caso, como $a > b$ e como o comprador procura maximizar seu excedente, é previsível que o comprador, caso seja do tipo que valoriza

mais a empresa, vá declarar que é do tipo que valoriza *menos* a empresa. A consequência é que a venda da empresa se dará por um valor v tal que $v = b$. É importante notar que não há como um comprador conseguir um valor de venda inferior a b, uma vez que os tipos de compradores são de conhecimento comum.

Esse será o mesmo resultado do caso em que o governo estabeleçe um preço que seja aceitável para qualquer um dos dois tipos de comprador. Esse preço terá de ser, necessariamente, igual a b, ou 10 milhões. Se o comprador for do tipo que atribui à empresa um valor elevado, ele extrai todo o excedente possível: $a - v = a - b = 30 - 10 = 20$ milhões.

Há, contudo, alternativas possíveis, que podem produzir melhores resultados para o governo. Uma dessas alternativas seria o governo desenhar um mecanismo de venda que tornasse o valor mais baixo ($b = 10$ milhões) um pouco menos interessante, caso o comprador qualificado fosse o comprador que atribui o valor mais elevado à empresa pública.

Por exemplo, o governo pode estabelecer um mecanismo em que a venda esteja assegurada se for oferecido um preço relativamente elevado, por exemplo, 17 milhões. Se for oferecido o valor mais baixo b, ou 10 milhões, a probabilidade de a venda efetivamente se concretizar seria de 0,5 ou 50%, pois, nesse caso, de acordo com o mecanismo que o governo estipulou, haveria 50% de chances de a privatização ser cancelada.

Note que, como 17 milhões $> b$, o comprador de baixa avaliação irá preferir correr o risco de não efetuar a compra, fazendo a oferta mais baixa. Mas valerá a pena para o comprador de alta avaliação pagar os 17 milhões?

Se o comprador de alta avaliação paga os 17 milhões, seu excedente é dado por: 30 milhões – 17 milhões = 13 milhões. Esse valor é certo, uma vez que a esse valor de venda o governo realiza a privatização da empresa com certeza.

Se, por outro lado, o comprador de alta avaliação oferece o preço mais baixo, seu excedente *esperado* será:

$$(0,5)\ (a - b) + (1 - 0,5)\ (0) = (0,5)\ (30 - 10) = 10$$

Assim, claramente, é melhor negócio para o comprador de alta avaliação pagar o preço mais elevado estipulado pelo governo e assegurar a aquisição da empresa pública. E para o governo, valerá a pena esse esquema?

Note que o governo venderá a empresa para um comprador de alta avaliação com uma probabilidade p. Já para o comprador com uma baixa avaliação, há 50% de chances de o governo vender, mas também há 50% de chances de o governo cancelar a venda da empresa.

Assim, devemos multiplicar a probabilidade de que o comprador seja do tipo com baixa avaliação por ½: com uma probabilidade $(1 - p)/2$, o governo venderá os títulos para um comprador de baixa avaliação, e com uma probabilidade $(1 - p)/2$, o governo deixará de vender a empresa para um comprador de baixa avaliação.

Como $p = 0{,}5$, a receita esperada do governo será:

$$17(0{,}5) + 10(0{,}25) + 0(0{,}25) = 8{,}5 + 2{,}5 = 11$$

Como 11 milhões é um valor superior aos 10 milhões que alternativamente obteria, resulta que esse mecanismo é melhor para o governo do que o mecanismo de um só preço para ambos os tipos.

Vejamos um outro mecanismo que, na verdade, é um aperfeiçoamento e generalização desse último. Suponha que a um valor suficientemente alto de venda da empresa, que chamaremos de α, a venda da empresa é assegurada (o governo não cancela a privatização). Por outro lado, a um valor β, tal que $\beta < \alpha$, há uma probabilidade $(1 - \theta)$ de que o governo cancele a privatização.

Nesse caso, um comprador de alta avaliação preferirá comprar a empresa se:

$$a - \alpha \geq \theta\,(a - \beta)$$

A equação anterior apenas informa que o comprador de alta avaliação preferirá comprar a empresa pagando o valor α (mais elevado), desde que o excedente que ele obtém comprando com certeza seja, pelo menos, igual ao excedente *esperado* que ele pode obter pagando o valor mais baixo β (correndo o risco de a privatização ser cancelada).

Em outros termos, o comprador de alta avaliação da empresa preferirá participar da privatização, pagando o valor mais alto, se:

$$a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta}$$

No caso de um comprador de baixa avaliação, ele preferirá correr o risco de ofertar o valor baixo β se:

$$\theta\,(b - \beta) \geq b - \alpha$$

A equação anterior informa que o comprador de baixa avaliação preferirá correr o risco de a privatização ser cancelada, oferecendo o valor baixo, desde que o excedente que ele espera obter, pela diferença entre sua avaliação e o va-

lor baixo, dada a chance de a privatização ocorrer, seja pelo menos igual ao excedente que ele obtém com certeza, pagando o valor mais elevado.

Reformulando a equação anterior, temos que:

$$b \leq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta}$$

Combinando esses dois últimos resultados, teremos que o comprador de alta avaliação irá preferir comprar com certeza, pagando o valor mais elevado a, e o comprador de baixa avaliação irá preferir correr o risco e oferecer o valor mais baixo β, se:

$$a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta} \geq b$$

Essa equação é a equação dé **restrição de compatibilidade de incentivos**: graças a ela, cada tipo de comprador tem interesse em selecionar o valor a ser pago mais adequado ao seu tipo.

A equação de restrição de compatibilidade de incentivos nos permite estabelecer duas recomendações estratégicas interessantes. A primeira delas é a de que estabelecer a muito próximo da avaliação a do comprador de alta avaliação estimula esse tipo de comprador a incorrer no risco de propor o valor mais baixo, na medida em que tende a violar a relação $a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta}$.

A segunda recomendação nos alerta que o mesmo problema ocorre se o valor $(1 - \theta)$, isto é, se o risco de a privatização ser cancelada for muito baixo.

Na formalização desse caso resta apenas adicionar a restrição de que nenhum comprador pode ser coagido a adquirir a empresa que está sendo vendida pelo governo. Logo, temos que:

$$a \geq \alpha;\ b \geq \beta$$

Essa restrição de que não pode haver coerção (no sentido de que ninguém paga um preço maior do que sua avaliação) é chamada de **restrição de racionalidade individual.**

Uma vez que seja válida a relação:

$$a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta} \geq b$$

Teremos que a receita esperada do governo será dada por:

$$p\alpha + (1 - p)\,\theta\beta$$

Essa última equação resulta do fato de que, em primeiro lugar, há uma proporção p de compradores de alta avaliação que, respeitada a restrição, $(a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta})$ estará disposta a ofertar o valor mais elevado α pela empresa.

Em segundo lugar, há uma proporção $(1 - p)$ de compradores de baixa avaliação que está disposta a ofertar o valor mais baixo β e possui uma probabilidade θ de conseguir comprar a empresa e a privatização não ser cancelada. Daí o termo $(1 - p)\,\theta\beta$.

A questão agora é encontrar os valores de α, β e θ que maximizam $p\alpha + (1 - p)\,\theta\beta$, sujeita às restrições $a \geq \alpha$; $b \geq \beta$.

É fácil ver que, dada a restrição:

$$a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta}$$

Ela implica que o valor mais elevado, α seja inferior ou igual à avaliação do comprador de maior avaliação, a. Com efeito, rearrumando os termos da restrição anterior, temos que:

$$a(1 - \theta) \geq \alpha - \theta\beta$$

O que, por sua vez, nos fornece como resultado que:

$$a - \alpha \geq \theta\,(a - \beta)$$

Como θ, a e β são valores positivos, e $a \geq \beta$, caso contrário não haverá oferta pela empresa – pois se $a < \beta$, o valor de compra mais baixo é superior à avaliação do comprador com maior avaliação –, segue-se que a restrição $a \geq \alpha$ é satisfeita automaticamente. Mas sendo satisfeita automaticamente, ela deverá valer como *igualdade*, e não como desigualdade:

$$a = \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta}$$

Isto porque, uma vez valendo a relação, é sempre mais interessante para o comprador de alta avaliação adquirir a empresa pública; enquanto for verdade que $a > \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta}$, o governo pode elevar e aumentar a receita esperada da privatização, sem violar nenhuma das restrições.

Todavia, uma vez que há realmente dois tipos distintos de compradores, um com a alta avaliação a e o outro com a baixa avaliação b, o fato de que $a = \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$ implica, necessariamente, que:

$$\frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} > b$$

Por outro lado, devemos ter $b = \beta$, caso contrário o governo poderia elevar o valor mínimo a ser pedido pela empresa pública, sem reduzir sua renda esperada, pois o comprador de baixa avaliação continuaria disposto a pagar o mesmo valor.

Substituindo $b = \beta$ em $a = \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$ e pondo α em evidência, resulta que:

$$\alpha = \theta b + (1 - \theta)\, a$$

Substituindo essa equação na expressão de receita esperada do governo:

$$p\alpha + (1 - p)\, \theta\beta$$

O que resulta em uma receita esperada para o governo de:

$$pa\,(1 - \theta) + \theta b$$

Rearrumando um pouco os termos da expressão da receita esperada do governo, temos que:

$$pa + \theta\,(b - pa)$$

Logo, há dois casos gerais possíveis:

1. $b < pa$: nesse caso o governo deve fazer $\theta = 0$, o que significa não vender a empresa se o preço for inferior a $\alpha = a$. A razão para isso é que o governo tem uma redução na sua receita esperada, se deixa de vender para o comprador com alta avaliação, para vender ao comprador de baixa avaliação (o termo $b - pa < 0$).
2. $b > pa$: nesse caso a melhor decisão para o governo é fazer $\theta = 1$, isto é, vender com certeza, desde que obtenha o valor mínimo pela empresa. Na prática, isso equivale ao esquema inicial, em que o governo estabelecia um valor mínimo para a empresa, de forma a garantir um comprador.

Vamos aplicar essas relações ao nosso exemplo numérico anterior. Conforme vimos, tinha sido suposto um valor $a = 30$ milhões, para o comprador do tipo com maior avaliação da empresa, um valor $b = 10$ milhões, para o comprador do tipo com menor avaliação, e uma população de compradores dividida igualmente entre compradores de alta avaliação e compradores de baixa avaliação ($p = 0{,}5$). Qual será o valor ótimo de θ?

Para responder a essa pergunta, considere a receita esperada da venda da empresa pelo governo, dados os parâmetros anteriormente indicados. Substituindo esses parâmetros na equação $pa\ (1 - \theta) + \theta b$, temos que:

$$0{,}5\ (30)\ (1 - \theta) + \theta\ (10) = 15 - 5\theta$$

Resulta assim que qualquer valor de $\theta > 0$ *reduz* a receita esperada do governo. O leitor poderá identificar rapidamente que esse caso é um dos casos em que $b < pa$, sendo, portanto, mais interessante para o governo estabelecer $\alpha = a$, e vender a empresa apenas ao comprador que possuir avaliação elevada.

Assim como podemos elaborar um mecanismo desse gênero para levar os jogadores a revelarem suas verdadeiras características por meio de suas decisões (no caso, assegurando a compra a apenas um preço mais elevado), podemos obter o mesmo resultado por meio de um mecanismo pelo qual os jogadores se vejam estimulados a *anunciar* suas verdadeiras características.

Com efeito, em vez de oferecer a empresa por um valor alto, porém certo, ou um valor baixo, porém incerto, o governo poderia simplesmente ter perguntado ao comprador qual era o seu verdadeiro tipo, avisando que, se o comprador informasse ser do tipo de avaliação alta, a empresa lhe seria oferecida com certeza, e ao valor mais elevado α; se o comprador informasse ser do tipo de avaliação baixa, seria pago pela empresa o valor menor β, mas a privatização teria 50% de chance de ser efetivamente concretizada (e 50% de chance de não ser efetuada).

O leitor poderá facilmente constatar que o resultado seria o mesmo, exceto que agora a forma do jogo seria diferente: os jogadores anunciariam seu verdadeiro tipo ao governo (eles não teriam qualquer motivo para mentir!), que atribuiria as recompensas adequadas.

Esse é um dos resultados mais interessantes em jogos de informação incompleta, e merece um pouco mais de atenção: ele se relaciona ao chamado *princípio da revelação*, nosso próximo tema.

O PRINCÍPIO DA REVELAÇÃO

Para entendermos apropriadamente o princípio da revelação, devemos inicialmente estudar mais detalhadamente a natureza do desenho de mecanismo. Seja um jogador que pode ser de dois tipos, A ou B, exatamente como o comprador do exemplo da privatização promovida pelo governo. A função de recompensa do jogador pode ser abreviada como:

$$r\ (s, y, A) \text{ ou } r\ (s, y, B)$$

Onde r é a função de recompensa, isto é, a função que especifica a recompensa do jogador, dados sua estratégia s, o resultado da adoção dessa estratégia y e seu tipo (que pode ser A ou B).

Assim, um exemplo de s seria "aceitar uma oferta da empresa pública a um alto valor de venda, porém de concretização certa". Se o jogador aceita s, ele paga 17 milhões e obtém a empresa: esse é o resultado. Que tipo de recompensa esse resultado significa para o jogador somente poderá ser conhecido especificando o tipo do jogador, depois de substituirmos s, y e A ou B na função de recompensa r do jogador.

É importante para o leitor ter claro que, embora a função r e os tipos (A, B) não estejam sob controle do jogador que elabora o mecanismo, tanto a estratégia s como o resultado y que s produz são determinados pelo jogador que elabora o mecanismo.

Considere um mecanismo que determine uma atribuição de s e y de acordo com os tipos dos jogadores, de tal forma que ao jogador do tipo A sejam atribuídos s^a e y^a, e ao jogador do tipo B sejam atribuídos s^b e y^b. Se a atribuição determinada pelo mecanismo for **compatível em incentivos** isso significará que nenhum jogador prefere qualquer outra estratégia (e, portanto, seu resultado) à estratégia e ao resultado que lhe foram atribuídos pelo mecanismo.

Em termos um pouco mais formais, se a alocação de s^a e y^a ao jogador de tipo A, e s^b e y^b ao jogador de tipo B forem alocações compatíveis em incentivos (e individualmente racionais, é bom não esquecer), e se s e y forem quaisquer outras estratégias e resultados disponíveis aos jogadores, teremos que:

$$r\ (s^a, y^a, A) \geq r\ (s, y, A)$$
$$r\ (s^b, y^b, B) \geq r\ (s, y, B)$$

O problema do jogador-desenhista que elabora o mecanismo é encontrar uma alocação compatível em incentivos que, uma vez adotada pelos jogadores,

voluntariamente, produza a melhor recompensa possível para o jogador que "desenhou" o mecanismo.

Considere agora um tipo especial de mecanismos, conhecido como mecanismos de revelação direta:

Um **mecanismo de revelação direta** ou, simplesmente, **um mecanismo direto** é um jogo bayesiano simultâneo, no qual os jogadores informam seu tipo a um árbitro, o qual utiliza essas informações para determinar a recompensa dos jogadores.

Um mecanismo direto é, então, um jogo bayesiano simultâneo, em que a ação dos jogadores é informar qual é o seu tipo. O que é realmente interessante é que, qualquer que seja o mecanismo, e a alocação compatível em incentivos e individualmente racional que seja oferecida aos jogadores, *existirá sempre um mecanismo direto que produzirá a mesma alocação.*

Para verificar isso, considere as alocações compatíveis em incentivos e individualmente racionais anteriores. O mesmo resultado poderia ser obtido se disséssemos aos jogadores: "Se você for do tipo A terá direito a uma alocação s^a e y^a, mas se for do tipo B terá direito a uma alocação s^b e y^b."

Como essas são alocações preferidas dos jogadores de acordo com os seus tipos, não há motivo para que eles mintam sobre seus verdadeiros tipos. Foi isto o que fizemos no final do exemplo da privatização da empresa pública pelo governo: simplesmente oferecemos alocações preferidas de acordo com os tipos e dissemos que os jogadores teriam direito a elas, desde que informassem seus tipos.

O leitor deve estar se perguntando onde está o "pulo do gato" aqui. Na verdade, o problema do desenho do mecanismo direto é estabelecer as alocações de cada tipo, de tal forma que nenhum jogador obtenha ganhos significativos ao falsear seu verdadeiro tipo. Para isso, a alocação proposta tem de ser vantajosa, até porque a coerção foi excluída como possibilidade. O ponto, contudo, é que ela tem de ser vantajosa *uma vez consideradas as regras do jogo*, que são estipuladas pelo nosso desenhista do mecanismo.

Foi isso que o governo fez no nosso exemplo, quando associou certeza ao valor mais alto e incerteza ao valor mais baixo. É claro que o comprador de avaliação alta preferiria pagar um valor baixo pela empresa pública mas, dadas as regras do jogo definidas pelo governo, era preferível ao comprador informar seu verdadeiro tipo e obter a empresa com certeza.

Podemos facilmente generalizar esse resultado para um jogo com n jogadores, no importante **princípio da revelação**:

Um mecanismo direto é dito **compatível em incentivos** se, para os jogadores, informar o seu verdadeiro tipo é um equilíbrio de Nash bayesiano. Qualquer equilíbrio de Nash bayesiano pode ser representado por um mecanismo direto compatível em incentivos.

Aqui apenas generalizamos o mesmo argumento, considerando as características de um jogo bayesiano. Para que um mecanismo direto seja compatível em incentivos é preciso que os jogadores não tenham incentivos para falsear a informação sobre seu verdadeiro tipo, e isso somente será possível caso a combinação de estratégias em que todos informam seu verdadeiro tipo seja um equilíbrio de Nash bayesiano; caso contrário, algum jogador ganhará mais por falsear seu verdadeiro tipo, mudando assim de estratégia.

Por outro lado, qualquer equilíbrio de Nash bayesiano pode ser reproduzido por meio de um mecanismo direto em que os jogadores informam seu verdadeiro tipo, em troca das alocações que compõem o equilíbrio de Nash bayesiano, uma vez que nenhum dos jogadores ganharia nada ao se desviar do equilíbrio de Nash bayesiano, falseando seu tipo.

Discutidos os principais conceitos de jogos simultâneos de informação incompleta, é importante analisarmos uma das aplicações mais interessantes de jogos bayesianos: a análise de leilões. Esse será o nosso assunto na próxima seção.

UMA APLICAÇÃO DE JOGOS DE INFORMAÇÃO INCOMPLETA: LEILÕES

Leilões são fenômenos tão comuns na vida econômica que possivelmente todos nós já tivemos notícia, assistimos ou até mesmo participamos de algum. No caso brasileiro, há desde leilões de blocos de exploração de petróleo e de energia elétrica até mesmo tipos mais prosaicos, como leilões obras de arte, leilões de imóveis, licitações para compra de máquinas, equipamentos e matérias-primas para empresas e repartições públicas etc. Na verdade, leilões se constituem como um fenômeno generalizado não apenas internacionalmente, mas ao longo da história humana.

Isso torna ainda mais interessante a discussão anterior, especialmente no que ela puder nos auxiliar a tratar do problema que é conhecido na literatura de jogos como o problema de *desenho de leilões* (do inglês, *auction design*). O problema ao se desenhar um leilão é garantir que a utilidade do leiloeiro seja maximizada, seja obtendo pelo objeto em leilão o maior preço possível (no caso em que se trata de um leilão de venda), seja obtendo o menor preço possível (quando se trata de um leilão de compra).

Antes, porém, vamos considerar alguns elementos básicos de leilões. Essa consideração se faz necessária uma vez que, na prática, leilões podem apresentar aspectos bastante diferentes, o que justifica considerar cada tipo de leilão a partir de um aspecto particular.

Elementos Básicos de Leilões

Chamam-se **regras do leilão** o conjunto de normas que definem quem pode realizar lances, como esses lances podem ser efetuados, que tipo de lance pode ser aceito, como o leilão se desenvolve, como o vencedor é determinado etc. O **ambiente do leilão**, por sua vez, é formado pelo conjunto de arrematadores do leilão, o valor que esses arrematadores atribuem ao objeto do leilão etc.

Leilões podem ser **abertos**, se qualquer um pode realizar lances, ou **fechados**, se há alguma determinação prévia dos arrematadores. É muito comum também que os leilões estabeleçam um **lance mínimo**, ou seja, um valor mínimo que qualquer lance pode assumir. O objetivo do lance mínimo é, frequentemente, proteger o leiloeiro de conluios entre os arrematadores.

Em **leilões de envelopes lacrados**, os arrematadores fazem um único lance ao leiloeiro, por escrito e em segredo, geralmente em envelopes lacrados (daí o nome). Nesse tipo de leilão, os envelopes somente são abertos após o período de ofertas de lances ter sido encerrado, quando é declarado o vencedor. No **leilão oral**, como o próprio nome diz, as ofertas são feitas pelos arrematadores oralmente, em geral em público.

Leilões podem ser de diferentes tipos no que diz respeito às regras dos valores dos lances. Como o próprio nome demonstra, no caso de um **leilão de lances ascendentes** os arrematadores vão oferecendo lances cada vez maiores, até que todos os arrematadores, exceto o vencedor, desistam.

No caso de um **leilão de lances descendentes**, o leiloeiro anuncia preços cada vez menores, e o vencedor é o primeiro arrematador a sinalizar ao leiloeiro que deseja adquirir o objeto do leilão ao preço anunciado. Finalmente, no caso de um **leilão de lances simultâneos**, os arrematadores anunciam seus lances ao mesmo tempo.

Leilões de lances simultâneos e leilões de lances descendentes são mais rápidos do que leilões de lances ascendentes. Por exemplo, nos leilões de peixe no Japão, os arrematadores dispõem de poucos segundos para fazerem seus lances. No leilão holandês de tulipas frescas, um "relógio holandês" conta o decréscimo no preço e os arrematadores fazem seu lance por meio de um mecanismo eletrônico.

Em leilões de venda, o vencedor é sempre o arrematador que oferece o maior lance. Isto não significa, no entanto, que o preço que ele tem de pagar seja necessariamente o que ofereceu. Caso o preço a ser pago seja o da oferta vencedora, diz-se que o leilão é um **leilão de primeiro preço.**

Embora o leilão de primeiro preço seja o tipo de leilão mais comum, há também um tipo de leilão, conhecido como **leilão de segundo preço**, em que o vencedor paga o segundo maior lance. O leilão de segundo preço é também conhecido como **leilão de Vickrey**, em homenagem ao Prêmio Nobel de Economia 1996, o economista William Vickrey (1914-1996), que realizou trabalhos fundamentais na análise de leilões.

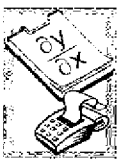
Um **leilão inglês** é um leilão oral, de lances ascendentes e de primeiro preço. Um **leilão holandês** é um leilão oral, de lances descendentes e de primeiro preço. Além dessas características, um leilão pode ser um **leilão de uma unidade**, quando há apenas uma unidade de um item no leilão, ou um **leilão de múltiplas unidades**, quando os arrematadores fazem seus lances especificando quanto desejam pagar e quantas unidades desejam arrematar.

Vamos agora empregar a teoria dos jogos de informação incompleta para analisar dois tipos de leilão: os leilões de primeiro preço e os leilões de segundo preço, ou leilões de Vickrey. Vamos começar analisando leilões simultâneos de envelope lacrado, que é um tipo comum de leilão. Em seguida discutiremos leilões de Vickrey ou leilões de segundo preço. Depois comentaremos brevemente a "maldição do vencedor" em leilões.

BOX 8.1

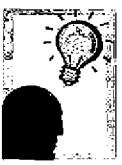
Uma História de Sucesso em Teoria dos Leilões

No início dos anos 1990 os Estados Unidos desenvolveram uma experiência inédita: o leilão de direito a faixas de radiofrequência para telefonia móvel. Com o auxílio de especialistas em leilões, que aplicaram teoria dos jogos, foi estabelecido um leilão aberto de lances crescentes, no qual, a cada rodada, os lances eram feitos simultaneamente para todas as licenças de faixas ofertadas. O sucesso do modelo pode ser estimado pela receita gerada: de acordo com Martin J. Osborne, em seu livro *An Introduction to Game Theory* (Oxford, Oxford University Press, 2004), apenas os quatro primeiros leilões levantaram mais de 18 bilhões de dólares.



O Leilão Simultâneo de Envelopes Lacrados

Vamos considerar um leilão simultâneo, em que os lances são feitos em envelopes lacrados. Vamos também considerar um ambiente de leilão em que as avaliações dos arrematadores são *valores independentes privados*:



Diz-se que um ambiente de leilão é caracterizado por **valores independentes privados** quando o número de arrematadores é fixo e cada arrematador conhece apenas sua avaliação do objeto do leilão, ignorando a avaliação dos demais.

Assim, uma vez que o ambiente do leilão é caracterizado por valores independentes privados, trata-se claramente de um jogo de informação incompleta: as recompensas dos jogadores, caso consigam arrematar o objeto do leilão, não são de conhecimento comum.

Isso não quer dizer que os jogadores não têm nenhum conhecimento das avaliações dos demais. Vamos representar uma avaliação de um jogador qualquer como v_i. Com efeito, há uma **crença comum** quanto aos valores mínimo, que chamaremos de $v_{\min}$, e máximo, que chamaremos de $v_{\max}$, das avaliações dos arrematadores, assim como há também uma crença comum acerca de como essas avaliações se distribuem entre esses extremos.

Todavia, como vimos, os jogadores não conhecem com certeza as avaliações dos demais. Isso significa que cada arrematador acredita que cada um dos demais pode ter uma avaliação v_i que varia, aleatoriamente, entre $v_{\min}$ e $v_{\max}$, de acordo com uma distribuição que todos acreditam ser a mesma.[6]

Resta definirmos a função de oferta dos arrematadores, que determinará suas estratégias. Vamos definir o lance de cada jogador s_i como uma função de sua avaliação do objeto do leilão, ou seja:

$$s_i = s_i(v_i)$$

Assim, a recompensa *ex post* de um jogador, $\Pi_i(s_i)$, caso seja um leilão de primeiro preço, será de:

$$\Pi_i(s_i) = \begin{cases} v_i - s_i(v_i) \text{ se } s_i > s_j, \text{para todo } i \neq j \\ 0 \text{ se } s_i \leq s_j, \text{ para algum } \ i \neq j \end{cases}$$

6 De uma forma um pouco mais técnica, poderíamos dizer que as avaliações dos jogadores podem ser representadas por variáveis aleatórias independentes com distribuições idênticas.

O sentido da expressão anterior é que a recompensa efetivamente obtida pelo jogador que vence o leilão de primeiro preço é a diferença entre o que ele acredita que o objeto do leilão vale, v_i, e o que ele oferece pelo mesmo objeto, $s_i(v_i)$.

Caso ele não tenha conseguido fazer a maior oferta, ele nada leva, mas também não incorre em nenhum custo por apenas participar do leilão. Estamos supondo, para simplificar, que, caso haja empate entre duas propostas, o leilão é decidido por um sorteio em que todos os arrematadores têm a mesma probabilidade de conseguir o objeto do leilão.

Vamos supor assim que há apenas dois arrematadores em um leilão: o jogador i e o jogador j. Vamos também considerar que i e j acreditam que as suas avaliações do objeto do leilão se distribuem uniformemente entre 0 e 1. Esses valores, bastante irrealistas, visam apenas a simplificar a análise. Qual será o equilíbrio de Nash bayesiano desse jogo?

Distribuições uniformes possuem duas características: são fáceis de trabalhar e ilustram situações em que qualquer evento é igualmente provável e, portanto, podem ser empregadas para representar casos em que os jogadores não conseguem ter um palpite do que é mais provável que aconteça. Vamos representar a distribuição uniforme das avaliações de i e de j por meio do Gráfico 8.1:

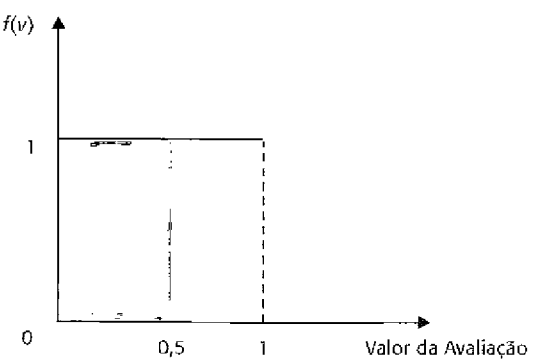


Gráfico 8.1

A função $f(v)$ indica, *para qualquer um dos jogadores*, quanto aumenta a probabilidade de que um determinado intervalo de avaliações contenha a real avaliação do outro jogador à medida que ampliamos esse intervalo.

Assim, por exemplo, se considerarmos o intervalo que vai de 0 a 0,5, teremos que a chance de a verdadeira avaliação de um dos jogadores se encontrar nesse intervalo é dada pela área sob a função $f(v)$ no intervalo de avaliação que vai de 0 a 0,5. Para calcularmos essa probabilidade, basta calcular a área do retângulo sombreado no Gráfico 8.1: $(0,5 - 0) \times 1 = 0,5$, ou 50% de chances. Desse modo, em uma distribuição uniforme de uma variável entre 0 e 1, a pro-

babilidade de um número a tal que $0 \leq a \leq 1$ é igual a a. Essa é uma propriedade útil, conforme veremos adiante.

O objetivo desse breve exercício foi nos preparar para discutir as estratégias que i e j podem adotar, tendo como base suas **recompensas condicionais**. As recompensas condicionais de um jogador são suas recompensas ponderadas pela probabilidade de que uma determinada combinação de estratégias se verifique.

Suponha que o jogador i decidiu fazer um lance s_i. Suponha também que j resolveu fazer um lance exatamente igual à metade do que ele acredita que o objeto do leilão vale. Em outras palavras, considere que:

$$s_j = \frac{v_j}{2}$$

Nessas condições, qual será a recompensa esperada de i? Vamos chamar a probabilidade de que a oferta de i supere o lance de j de $P\{s_i > v_j/2\}$, e a probabilidade de que a oferta de i não supere o lance de j de $P\{s_i < v_j/2\}$. Assim, temos que a recompensa esperada de i será de:

$$\Pi_i(s_i) = 0 \times P\{s_i < v_j/2\} + (s_i - v_i) \times P\{s_i > v_j/2\} + 0{,}5 \times (s_i - v_i) \times P\{s_i = v_j/2\}$$

O leitor deve atentar para o último termo da expressão anterior: $0{,}5 \times (s_i - v_i) \times P\{s_i = v_j/2\}$. Vimos no início do nosso exemplo que há apenas dois jogadores, ambos com a mesma probabilidade de ganhar o objeto do leilão em um sorteio caso façam propostas iguais. Assim, a probabilidade de que o jogador i faça a mesma oferta do jogador j tem de ser ponderada pela probabilidade de que ele ganhe o sorteio.

A expressão de $\Pi_i(s_i)$ pode ser bastante simplificada, dadas as nossas hipóteses. Em primeiro lugar, como as avaliações dos jogadores são uniformemente distribuídas de uma forma contínua, a chance de $P\{s_i = v_j/2\}$, ou seja, de que os jogadores façam a mesma oferta, é nula.

A razão para isso é que estamos admitindo que as avaliações dos jogadores possam variar infinitesimalmente (confira a Figura 8.1), como se estipulássemos que os lances nos envelopes fechados devessem ter um número muito grande de casas decimais. Assim, as chances de que os dois jogadores façam *exatamente* o mesmo lance é praticamente nula.

A recompensa esperada do jogador i acaba por se reduzir apenas a:

$$\Pi_i(s_i) = (v_i - s_i) \times P\{s_i > v_j/2\}$$

Vimos anteriormente que em uma distribuição uniforme de uma variável entre 0 e 1, a probabilidade de um número a tal que $0 \leq a \leq 1$ é igual a a. Desse modo, podemos reescrever $P\{s_i > v_j/2\}$ como $P\{2s_i > v_j\}$.

Vejamos que valores a probabilidade $P\{2s_i > v_j\}$ pode assumir. Inicialmente, ela pode assumir o valor $2s_i$, que, conforme vimos, é uma característica das distribuições uniformes. Contudo, há um limite para esse valor: ele não pode ser tal que $2s_i > 1$, pois 1 é o valor máximo que as avaliações individuais dos jogadores podem alcançar.

A forma de se escrever esse tipo de restrição é dizer que $P\{2s_i > v_j\} = \min\{2s_i, 1\}$. Assim, estaremos dizendo que $P\{2s_i > v_j\}$ pode assumir dois valores, $2s_i$ ou 1, o que for o menor entre eles. Chegamos finalmente à expressão:

$$\Pi_i(s_i) = (v_i - s_i) \times \min\{2s_i, 1\}$$

Vamos supor, como temos feito ao longo deste livro, que i busca maximizar suas recompensas esperadas. Vejamos o que acontece se i aumenta s_i tal que $s_i > 1/2$. Isso não terá qualquer efeito sobre o termo $\min\{2s_i, 1\}$ da expressão anterior, pois a partir de $s_i = 1/2$ o termo $\min\{2s_i, 1\}$ é sempre igual a 1.

Porém, o termo $\min(s_i - v_i)$ na expressão da recompensa esperada de i irá se reduzindo, pois *i estará pagando cada vez mais pelo objeto do leilão, dado o que ele vale para i.* Desse modo, o aumento de s_i para valores acima de ½ reduz a recompensa esperada de i e não parece ser uma escolha sensata para um jogador que deseja maximizar suas recompensas.

Assim, como i é racional, ele nunca irá fazer $s_i > 1/2$. Com isso, podemos simplificar as coisas, pois a restrição expressa em $\min\{2s_i, 1\}$ deixa de ser uma possibilidade. Desse modo, podemos reescrever a expressão $\Pi_i(s_i) = (s_i - v_i) \times \min\{2s_i, 1\}$ como sendo simplesmente:

$$\Pi_i(s_i) = (s_i - v_i) \times 2s_i$$

Todo o problema agora se resume a encontrar o máximo da expressão anterior. Aplicando a condição de primeira ordem, obtemos que:

$$\frac{\partial \Pi_i(s_i)}{\partial s_i} = 2v_i - 4s_i = 0$$

De onde obtemos:

$$s_i = \frac{v_i}{2}$$

Ou seja, a melhor resposta do jogador *i* à estratégia do jogador *j* de oferecer a metade do que o objeto do leilão vale para *j* é o jogador *i* também oferecer a metade do que o objeto do leilão vale para ele. Obviamente, o mesmo vale para o jogador *j*, de tal forma que o único equilíbrio desse jogo consiste nos dois jogadores oferecendo a metade do que o objeto do leilão vale para eles.

Na verdade, prova-se que esse resultado possui validade geral para leilões de primeiro preço com envelopes lacrados: se os jogadores são risco-neutros, ou seja, é indiferente para eles receber um valor com certeza ou receber o mesmo valor como valor esperado, ou seja, como resultado de uma ponderação dos valores que pode receber pelas suas probabilidades,[7] em leilões desse tipo os jogadores sempre irão oferecer menos do que o objeto do leilão vale para eles.

O Leilão de Vickrey ou de Segundo Preço

Como vimos, no leilão de Vickrey, também conhecido como leilão de segundo preço, a oferta vencedora não paga efetivamente o valor que ofertou, e sim o valor da oferta que ficou em segundo lugar. O interessante nesse tipo de leilão é que, em um leilão de Vickrey, diferentemente do que ocorre no leilão simultâneo de envelopes lacrados, a estratégia ótima para todos os jogadores é oferecer lances que são suas verdadeiras avaliações do objeto do leilão.

Para demonstrar isso, considere que nem o jogador *i* nem o jogador *j* conhecem suas respectivas avaliações, v_i e v_j. Vamos considerar também, assim como fizemos no caso anterior, que a recompensa *ex post* de um jogador é a diferença entre o valor efetivamente pago pelo objeto do leilão e quanto o objeto do leilão vale para ele.

Vamos analisar a situação do ponto de vista de um dos jogadores; no caso, do ponto de vista do jogador *i*. Há três situações possíveis.

a) $v_i > v_j$

Se a avaliação do jogador *i* for maior do que a avaliação do jogador *j*, e o jogador *i* fizer uma oferta $s_i < v_j$, ou seja, uma oferta menor do que a sua avaliação, o jogador *i* correrá o risco de perder o objeto do leilão, o qual vale mais para *i* do que para *j*.

---

7 Dito de outra maneira, se um jogador é risco-neutro, é indiferente para ele receber 100 reais ou fazer uma aposta em que ele tem 50% de chances de ganhar 200 reais (e 50% de chances de não ganhar nada).

Isso porque pode acontecer de $s_i < v_j < v_i$, ou seja, ao oferecer menos do que o objeto do leilão vale para ele, i pode estar fazendo uma oferta que acabe sendo menor do que o valor do objeto também para j. Com isso, j acaba vencendo o leilão, pagando um preço inferior ao que o jogador i estaria disposto a pagar. Assim, a melhor coisa que i tem a fazer, nesse caso, é oferecer $s_i = v_i$.

b) $v_i = v_j$

Nesse caso, se i fizer uma oferta inferior à oferta do jogador j, i perde o leilão e nada ganha, obtendo uma recompensa *ex post* de zero. Se i fizer uma oferta maior do que j, i vence o leilão, recebe o objeto, mas, caso j tenha oferecido $s_j = v_j$ (e veremos ao final desse caso que há bons motivos para supor que ele o faça), o jogador paga v_i pelo objeto do leilão, o que resulta novamente em uma recompensa *ex post* de zero, pois i terá pago pelo objeto exatamente o que ele vale para i.

Finalmente, caso o jogador i faça uma oferta exatamente igual à sua avaliação do objeto do leilão, que é a mesma avaliação do jogador j, o resultado do leilão é definido por sorteio com probabilidades iguais para ambos os jogadores. Com isso, há 50% de chances de i ganhar e 50% de chances de i não ganhar. Se i ganha o sorteio, novamente ele paga v_i pelo objeto do jogo, e sua recompensa *ex post* é zero. Se i perde no sorteio, ele nada ganha e mais uma vez sua recompensa *ex post* é nula.

Desse modo, caso $v_i = v_j$, a recompensa *ex post* de i será sempre nula. Assim, todas as estratégias de i, inclusive oferecer pelo objeto do leilão o que ele realmente vale, são igualmente válidas do ponto de vista do jogador i.

c) $v_i < v_j$

Nesse caso, o objeto do leilão vale menos para i do que para j. Estamos na situação inversa do primeiro caso. No primeiro caso, o risco era o de perder o objeto do leilão para o jogador que o valoriza menos. Aqui, o risco é o de *ganhar* o objeto do leilão pagando mais do que ele vale. A forma de o jogador i garantir que isso não ocorra, dado que ele não sabe se o jogador j efetivamente valoriza o objeto do leilão mais do que ele, é novamente oferecer pelo objeto do leilão o que ele realmente vale para i.

Desse modo, oferecer sempre o que o objeto do leilão vale para o jogador i, uma vez que ele não conhece a avaliação do jogador j, é uma estratégia ótima no leilão de Vickrey. O mesmo raciocínio se aplica ao jogador j e, assim, temos um equilíbrio de Nash em que os *dois jogadores oferecem pelo objeto do leilão a sua verdadeira avaliação*.

Note que a estratégia de oferecer o quanto vale o objeto do leilão para o jogador é fracamente dominante, ou seja, outras estratégias podem fornecer resultados tão bons quanto $s_i = v_i$ em determinadas situações, mas $s_i = v_i$ fornece resultados estritamente melhores do que essas estratégias em outras situações. Assim, no caso em que as avaliações dos dois jogadores fossem iguais, qualquer oferta seria uma boa opção para os jogadores, e não apenas a oferta $s_i = v_i$, mas isso não é válido em outros casos.

Nem sempre leilões dão resultados distintos, embora suas regras possam ser bastante diferentes. Para entender isso, vamos analisar a equivalência estratégica entre leilões, ilustrando essa propriedade por meio do leilão holandês e do leilão inglês.

BOX 8.2

Os Cuidados ao Passar da Teoria à Prática

No início dos anos 1990, a Nova Zelândia também fazia experiências pioneiras em leilões de espectros de radiofrequência, porém sem tomar sempre os devidos cuidados em adaptar a teoria às circunstâncias concretas. Como conta John McMillan em seu artigo "Selling Spectrum Rights" (*Journal of Economic Perspectives*, v. 8 n. 3, p. 145-162, summer 1994), o governo da Nova Zelândia decidiu adotar o leilão de Vickrey, mas não estabeleceu um valor mínimo para os lances, além de fazer leilões abertos, o que se revelou desastroso.

Sendo um país muito pequeno, a Nova Zelândia contou com poucos candidatos, o que produziu resultados muito embaraçosos: em um dos leilões, por exemplo, o vencedor fez uma oferta de 100 mil dólares neozelandeses, mas pagou a segunda maior oferta, que foi de apenas 6 dólares neozelandeses. Em uma cidade pequena do país, um estudante ofereceu 1 dólar neozelandês por uma licença de televisão. Ninguém mais fez qualquer oferta e o estudante ganhou a licença.

Leilão Holandês, Leilão Inglês e Equivalência Estratégica entre Leilões

Vamos, inicialmente, comparar o leilão holandês com o leilão de envelopes lacrados de primeiro preço, para investigarmos se o resultado do leilão de envelopes lacrados pode ser alterado, caso a opção seja feita pelo leilão holandês. Como sempre, estaremos considerando um ambiente de leilão com valores independentes privados.

No leilão holandês, o leiloeiro reduz o preço até que um dos jogadores indique que deseja comprar o objeto do leilão ao preço corrente. O importante a ser considerado é que, durante o leilão, cada jogador conhece apenas a sua ava-

liação. Assim, uma estratégia para um jogador i será um preço ao qual ele irá sinalizar que deseja encerrar o leilão, e o vencedor será o jogador que primeiro sinalizar para encerrar o leilão, pagando o preço mais elevado.

Podemos definir a função de oferta dos arrematadores no leilão holandês, que determinará suas estratégias. Obviamente, também no caso do leilão holandês, o lance de cada jogador s_i é uma função de sua avaliação do objeto do leilão:

$$s_i = s_i(v_i)$$

A recompensa *ex post* de um jogador, Π_i, no caso de um leilão holandês, será de:

$$\Pi_i(s_i) = \begin{cases} v_i - s_i(v_i) \text{ se } s_i > s_j, \text{para todo } i \neq j \\ 0 \text{ se } s_i \leq s_j, \text{ para algum } \ i \neq j \end{cases}$$

A recompensa efetivamente obtida pelo jogador que vence o leilão holandês é a diferença entre o que ele acredita que o objeto do leilão vale, v_i, e o que ele ofereceu pelo mesmo objeto, ao parar a redução do preço: $s_i(v_i)$. Como sempre, estamos supondo que caso ele não tenha conseguido fazer a maior oferta, ele nada leva, mas também não incorre em nenhum custo por participar do leilão, e assim sua recompensa *ex post* ao perder o leilão é zero.

O leitor já deve ter percebido que a função de recompensa *ex post* do leilão holandês é a mesma do leilão de primeiro preço com envelopes lacrados. Por isso, esses leilões são ditos **estrategicamente equivalentes**, resultando disso que nesses dois leilões *os jogadores irão se comportar da mesma forma*. Assim, o resultado final será o mesmo no caso do leilão de primeiro preço com envelopes lacrados e no caso do leilão holandês.

O leilão inglês pode assumir várias formas. Vamos considerar um leilão inglês que se processa da seguinte maneira: o preço é aumentado progressivamente, aos poucos, a partir de um preço de reserva mínimo, em um telão na frente dos jogadores, que se encontram acomodados em um salão.

Cada jogador se inscreve no início do leilão, e anuncia sua desistência retirando-se do recinto onde se processa o leilão quando o preço ultrapassa o nível que considera aceitável. Uma vez que se retire do recinto onde o leilão acontece, o jogador não pode mais retornar até que o leilão acabe. O leilão termina quando restar apenas um jogador no salão onde ele se processa, e o preço em questão quando isso acontece é o preço que deve ser pago.

Nesse leilão, cada jogador i tem de decidir apenas a que preço irá se retirar do leilão, que vamos chamar de s_i. O jogador vencedor é aquele que possui o maior

s_i, e ele paga o preço diante do qual o penúltimo jogador se retirou do salão. A função de recompensa *ex post* de um jogador i qualquer, então, é dada por:

$$\Pi_i(s_i) = \begin{cases} v_i - s' \text{ se } s_i > s', \text{onde } s' \text{ é o segundo maior preço} \\ 0 \text{ se } s_i < s_j, \text{ para algum } \ i \neq j \end{cases}$$

Pode-se ver claramente que essa é a mesma função de recompensa *ex post* do leilão de Vickrey. Isso estabelece a nossa segunda relação de equivalência estratégica entre leilões: o leilão inglês é estrategicamente equivalente ao leilão de Vickrey.

Até aqui, tratamos de leilões em ambiente de valores independentes privados. Agora vamos tratar brevemente de um tipo diferente de ambiente de leilão, que dá origem a um problema interessante: a chamada "maldição do vencedor".

Leilões de Valor Comum e a Maldição do Vencedor

O ambiente de leilão de valores independentes privados não se aplica a uma série de leilões do mundo real, como é o caso, por exemplo, dos leilões de direitos de exploração de recursos minerais. Nesse caso, os recursos têm o mesmo valor para todos os arrematadores. Por exemplo, a presença de uma jazida de petróleo de determinadas dimensões, em um determinado bloco que está sendo leiloado, tem o mesmo valor para todos os jogadores, valor este que é determinado pelo mercado internacional de petróleo.

O problema é que esse valor é incerto e é um valor a respeito do qual os jogadores possuem diferentes informações e crenças. Essas características constituem o **ambiente de leilão de valor comum**. O que poderá acontecer nesse tipo de situação?

Um problema muito comum nesse tipo de situação é a chamada *maldição do vencedor*. Como os jogadores em um leilão de valor comum possuem diferentes avaliações quanto ao valor do bem, alguns errarão para mais (erros de sinal positivo, pois o valor presumido será superior ao valor verdadeiro do objeto do leilão), outros errarão para menos (erros de valor negativo, pois o valor presumido será inferior ao verdadeiro). O jogador com maiores chances de ganhar o leilão é justamente *aquele que cometer o maior erro de sinal positivo*. Por esse motivo, os vencedores de leilões de valor comum em geral pagam *mais* do que o objeto do leilão realmente vale. Essa é chamada **maldição do vencedor.**

Há algum meio de evitá-la? É necessário, antes de qualquer coisa, aceitar que a própria estimativa deve conter um erro. O jogador deve então tentar estimar, empregando testes estatísticos, qual é sua margem de erro, e deduzir essa margem de sua oferta.

EXERCÍCIOS

8.1 Para o jogo da subcontratação da Figura 8.3, calcule o valor mínimo que p deve assumir, para que seja vantajoso para a empresa multinacional contratar o fornecedor no Terceiro Mundo. Sugestão: supondo que a empresa multinacional avisasse o fornecedor de que, independentemente de seu tipo, ele será contratado, calcule a recompensa esperada da empresa multinacional usando p como incógnita, de acordo com a reação ótima de cada tipo de fornecedor ao aviso. Faça o mesmo para o caso de a empresa multinacional avisar o fornecedor de que ele não será contratado. Em seguida, calcule o valor de p necessário para que a primeira recompensa esperada seja maior do que a segunda.

8.2 Também para o jogo da subcontratação, suponha que a forma estratégica da Figura 8.1 (a) (fornecedor responsável socialmente) fosse:

	Empresa Multinacional	
Fornecedor	**Contrata**	**Não Contrata**
Age Responsavelmente	2, 1	0, −1
Age Irresponsavelmente	−1, −5	−1, 0

E a forma estratégica da Figura 8.1 (b) (fornecedor irresponsável socialmente) fosse:

Fornecedor	**Empresa Multinacional**	
	Contrata	**Não Contrata**
Age Responsavelmente	−2, 1	0, −1
Age Irresponsavelmente	−1, −5	1, 0

Suponha que a probabilidade de qualquer um dos dois tipos ser selecionado pela Natureza ainda é a mesma, $p = 1 - p = 0{,}5$. Determine o equilíbrio de Nash bayesiano nesse caso.

8.3 Suponha duas empresas que desejam criar uma *joint venture*, as quais chamaremos de Empresa 1 e Empresa 2. Nenhuma das duas empresas conhece o custo que a outra terá para participar da *joint venture*. Apenas sabem que esses custos, para a Empresa 1, podem ser "elevados" ($c_1 = 3$) com 90% de probabilidade, e "reduzidos" ($c_1 = 1$) com 10% de probabilidade.

Esses custos são deduzidos das recompensas da Empresa 1 por investir na *joint venture*. As duas empresas possuem as mesmas estratégias possíveis: investir na *joint venture* ou "pegar carona" no investimento da outra empresa, tentando se apropriar dos ganhos da *joint venture* investindo o mínimo possível. A forma estratégica desse jogo se encontra a seguir:

	Empresa 2	
Empresa 1	**Investe**	**Pega Carona**
Investe	$4-c_1$, 5/2	$4-c_1$, 4
Pega Carona	4, 5/2	0, 0

Dadas as probabilidades de que o custo da Empresa 1 seja elevado ou reduzido, calcule o equilíbrio de Nash bayesiano desse jogo. As empresas irão constituir a *joint venture*?

8.4 Suponha um dilema dos prisioneiros com dois jogadores: o jogador 1 e o jogador 2. O jogador 1 é de apenas um tipo e isso é de conhecimento comum entre os jogadores. Já o jogador 2 pode ser de dois tipos: "agressivo" ou "conciliador". As recompensas dos dois jogadores estão descritas nas duas formas estratégicas seguintes, conforme o jogador 2 seja do tipo agressivo ou conciliador:

Jogador 2 do Tipo Conciliador

	Jogador 2	
Jogador 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	0, 0	4, −2
Não Coopera	−2, 7	5, 5

Jogador 2 do Tipo Agressivo

	Jogador 2	
Jogador 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	0, −2	4, 0
Não Coopera	−2, 5	5, 7

Pede-se:

a. Calcular o equilíbrio de Nash bayesiano nesse jogo se a probabilidade de o jogador 2 ser agressivo for de 10%.

b. Calcular o mesmo equilíbrio do item (a) se a probabilidade de o jogador 2 ser agressivo for de 80%.

8.5 Compare os resultados do modelo de Cournot de informação incompleta com um modelo de informação completa, em que:

a. A Empresa 2 possui custo $C_2 = 2q_2$;

b. A Empresa 2 possui custo $C_2 = 4q_2$.

8.6 Considere as mesmas restrições de compatibilidade de incentivos e de racionalidade individual, assim como os mesmos parâmetros do exemplo da privatização pelo governo da empresa pública ($a = 30$ milhões, $b = 10$ milhões), exceto que agora a proporção de compradores com alta avaliação é de apenas 20%. Qual seria o valor ótimo de θ a ser fixado, nesse caso, pelo governo?

8.7 Aplique a discussão do leilão simultâneo de envelopes lacrados ao caso da privatização da empresa pública, supondo que há dois jogadores, o jogador 1 e o jogador 2. O que irá acontecer, na sua opinião, supondo que a avaliação do jogador 1 é de 20 milhões e a do jogador 2, de 12 milhões?

8.8 Repita o exercício 8.7, supondo agora que se trata de um leilão de Vickrey.

8.9 Suponha dois jogadores que têm valores independentes privados de um objeto de leilão. Suponha ainda que as avaliações dos dois jogadores, representadas por v_1 e v_2, possuem distribuição uniforme idêntica entre 0 e 1. Responda:

a. Quanto os jogadores irão ofertar em um leilão de primeiro preço?

b. Quanto os jogadores irão ofertar em um leilão holandês?

8.10 Se os jogadores do exercício 8.7 não possuírem uma crença comum quanto à distribuição das avaliações dos arrematadores, o que poderá acontecer?

9

Outros Jogos de Informação Assimétrica: Equilíbrio Perfeito Bayesiano e Sinalização

O verdadeiro conhecimento é saber a extensão da própria ignorância.

CONFÚCIO, SÁBIO CHINÊS (551-479 A.C.)

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudaremos jogos com informação assimétrica, que é um conceito mais amplo do que o de informação incompleta. Estudaremos, assim, jogos sequenciais de informação incompleta, ou seja, jogos em que os jogadores tomam suas decisões em sequência e possuem informação privada.

Esse estudo é importante em virtude de suas aplicações. Por exemplo, como sinalizar para uma outra empresa, que pode ser um parceiro comercial importante, que a sua empresa é uma empresa com um padrão de qualidade e ética elevado, quando há um grande número de empresas que não se comportam eticamente?

EQUILÍBRIO BAYESIANO PERFEITO

Para discutirmos o conceito de equilíbrio bayesiano perfeito precisamos, inicialmente, conhecer o teorema de Bayes. Após termos apresentado brevemente esse teorema, estaremos em condições de entender a interação que acontece entre estratégias e crenças dos jogadores quando eles interagem sequencialmente com informação incompleta.

O Teorema de Bayes

O teorema de Bayes deve seu nome ao ministro presbiteriano e matemático inglês Thomas Bayes (1702?-1761). Eis o teorema:

Seja um conjunto de eventos mutuamente excludentes $A_1, ..., A_n$ do espaço amostral S, sendo que a probabilidade de qualquer um desses eventos é diferente de zero e o conjunto desses eventos esgota todas as possibilidades do espaço amostral S.

Para qualquer evento $B \subset S$ com probabilidade diferente de zero teremos:

$$prob\ (A_j\ /B) = \frac{prob(A_j)prob(B\ A_j)}{\sum_{i=1}^{n} prob(A_i)prob(B\ A_i)}, i = 1, \ldots, n.$$

Na apresentação do teorema de Bayes, *prob* (X) é a probabilidade de um evento X, e *prob* (X/Y) é a probabilidade de um evento X, dado que o evento Y ocorreu.

Vamos ilustrar o teorema de Bayes com um exemplo hipotético de uma empresa de jogos eletrônicos que está decidindo se faz, ou não, uma proposta de aquisição de uma concorrente. O problema da empresa compradora é que não há uma informação segura sobre as perspectivas do novo jogo recém-lançado pela concorrente, e que envolveu um investimento significativo.

Se o novo jogo da empresa concorrente for um fracasso, além do fato de que provavelmente essa empresa perderá uma participação significativa no mercado, isso também significará que os criadores de software da empresa concorrente não são tão originais e talentosos quanto se acredita, e talvez não valha a pena adquirir a empresa concorrente e incorporar ao quadro da empresa compradora esses profissionais. Contudo, se o jogo for um sucesso, isso comprovará que a empresa de jogos eletrônicos possui criadores talentosos, que são um bom investimento no futuro.

Imagine que a empresa compradora, após uma pesquisa cuidadosa, avalia que, dadas as características do jogo recém-lançado, há uma chance de 50% de os profissionais da empresa concorrente serem talentosos e criativos e o jogo ser um sucesso, e 50% de chances de eles não possuírem nenhuma característica excepcional e o jogo ser um fracasso. Em outras palavras, a empresa compradora não identifica uma maior probabilidade de que os executivos sejam talentosos ou não, dadas as características do jogo lançado.

Eis que, durante uma reunião da diretoria da empresa compradora, seus executivos ficam sabendo que um instituto de pesquisa de mercado projetou as vendas do novo jogo e essa projeção levou o instituto a considerar o jogo um fracasso. O problema é que o instituto de pesquisa nem sempre está certo.

Na verdade, há uma margem de erro nas projeções e o próprio instituto de pesquisa de mercado revela que considera fracassos programas que acabam por se mostrar bem-sucedidos em 10% das vezes, e afirma serem sucessos programas que acabam por fracassar em 30% das vezes.

Como, então, a opinião do instituto de pesquisa irá influir nas decisões dos executivos da empresa compradora? Em que medida eles devem levar a sério essa opinião, se o instituto comete erros?

Cada possível situação em relação ao sucesso ou não do novo jogo eletrônico representa um **estado** diferente. Vamos representar os diferentes estados pela letra grega Ω (ômega maiúsculo), indicando o estado em que o jogo é um sucesso por Ω_1, e o estado em o jogo é um fracasso por Ω_2.

Assim, a melhor previsão do sucesso do jogo, antes de o instituto divulgar a projeção, seria dada pela **distribuição *a priori*** da tabela da Figura 9.1:

Estado (Ω)	***prob*(Ω)**
Ω_1 (Sucesso)	0,5
Ω_2 (Fracasso)	0,5

Figura 9.1 Probabilidades a *Priori* (*prob*(Ω))

Nosso interesse agora é avaliar como as previsões anteriores se alteram após o instituto de pesquisa ter divulgado sua projeção. Em outras palavras, de que forma as previsões anteriores se alteram após a empresa *ter as novas informações fornecidas pela projeção do instituto*? Isso porque o efeito da projeção do instituto é fornecer novas informações, que podem melhorar a previsão inicial.

Contudo, vimos que a resposta oferecida pelo instituto de pesquisa de mercado não é definitiva: há uma margem de erro, gerando tanto falsos fracassos quanto falsos sucessos. De que forma deve ser incorporada, então, a nova informação da projeção do instituto de pesquisa de mercado, ou seja, sua projeção de fracasso, para que ela aumente as chances de acerto dos executivos da empresa compradora?

Primeiramente, temos de estabelecer em que medida os executivos podem confiar nas informações oferecidas pelo instituto de pesquisa de mercado. Isso foi feito na tabela da Figura 9.2:

Estado Ω	Projeção do Instituto de Pesquisa de Mercado		
	X_1 (Sucesso)	X_2 (Fracasso)	$\sum X_j$
Ω_1 (Sucesso)	0,90	0,10	1,00
Ω_2 (Fracasso)	0,30	0,70	1,00

Figura 9.2 Probabilidades Condicionais *prob*(X/Ω)

A tabela da Figura 9.2 indica em que grau é possível confiar no instituto de pesquisa de mercado. Podemos observar na primeira linha da tabela, que representa o estado Ω_1, em que há sucesso de vendas, que o teste nos dá um sucesso verdadeiro em 90% das vezes e um falso fracasso em 10% das vezes.

Por outro lado, vemos na segunda linha da tabela, que representa o estado Ω_2, em que há fracasso, que o mesmo instituto nos dá um falso sucesso em 30% das vezes e um fracasso verdadeiro em 70% das vezes.

Há uma outra forma de ler as informações da tabela da Figura 9.2: as probabilidades em cada célula podem ser consideradas as *probabilidades condicionais de um diagnóstico X em função de um estado* Ω. Assim, quando escrevemos o valor 0,9 na célula que se encontra na primeira linha e na primeira coluna, estamos representando o fato de que há 90% de chances de o instituto de pesquisa projetar um sucesso *caso efetivamente haja um lançamento bem-sucedido*.

Se prosseguirmos na mesma linha, veremos que há 10% de chances de o instituto de pesquisa projetar um falso fracasso, dado que há efetivamente um lançamento de jogo bem-sucedido. O mesmo raciocínio pode ser repetido para a linha inferior da tabela.

Fica evidente por que, ao somarmos todas as células de uma mesma linha, obtemos uma probabilidade de 1, ou 100% de chances: dado que qualquer um dos dois estados se verificou, o instituto sempre projetará sucesso ou fracasso, e assim os eventos representados em cada linha cobrem todo o espaço amostral de projeções do instituto.

Vamos agora combinar as probabilidades *a priori* da Figura 9.1 com as informações da Figura 9.2. Para isso, considere a perspectiva de que o programa seja um sucesso de vendas, e a proporção de vezes em que o instituto projeta um fracasso: a primeira probabilidade, de acordo com os executivos da empresa compradora, é de 50%, e a segunda, de 10%.

Assim, o estado Ω_1 e a projeção de fracasso do instituto (X_2) ocorrem conjuntamente em 50% × 10% = 5% das vezes. Consequentemente, o estado Ω_1 e a projeção de sucesso do instituto (X_1) ocorrem conjuntamente em 50% × 90% = 45% das vezes.

O mesmo raciocínio pode ser desenvolvido para o caso em que há fracasso (estado Ω_2) e o instituto de pesquisa de mercado faz a projeção correta de fracasso (X_2): isso ocorre em 50% × 70% = 35% das vezes.

Aplicando o teorema de Bayes para determinar *prob* (Ω_2/X_2), podemos obter diretamente:

$$prob\ (\Omega_2/X_2) = \frac{prob(\Omega_2)prob(X_2/\Omega_2)}{prob(\Omega_2)prob(X_2/\Omega_2)+prob(\Omega_1)prob(X_2/\Omega_1)}$$

Substituindo os dados do nosso exemplo na fórmula anterior, obtemos:

$$prob\ (\Omega_2/X_2) = \frac{(0,5)(0,7)}{(0,5)(0,7)+(0,5)(0,1)} = 0,875$$

Também podemos aplicar o teorema de Bayes para determinar *prob* (Ω_1/X_2):

$$prob\ (\Omega_1/X_2) = \frac{prob(\Omega_1)prob(X_2/\Omega_1)}{prob(\Omega_2)prob(X_2/\Omega_2)+prob(\Omega_1)prob(X_2/\Omega_1)}$$

Substituindo os dados do nosso exemplo na fórmula, obtemos:

$$prob\ (\Omega_1/X_2) = \frac{(0,5)(0,1)}{(0,5)(0,7)+(0,5)(0,1)} = 0,125$$

Podemos, então, construir *a tabela de probabilidades a posteriori:*

Estado (Ω)	*prob* (Ω/X_2)
Ω_1 (Sucesso)	0,125
Ω_2 (Fracasso)	0,875
Σ	1

Ou seja, houve uma mudança significativa em relação à tabela da Figura 9.1, que apresentava as probabilidades *a priori*: naquela tabela, dadas as características do jogo, havia chances iguais de ser um fracasso ou um sucesso. Contudo, após incorporar a informação do instituto de pesquisa, mesmo considerando a margem de erro, agora as chances de o novo jogo ser um fracasso aumentaram para 87,5%, o que dá uma boa margem de segurança para os executivos desistirem da aquisição.

Estamos agora em condições de discutir o equilíbrio perfeito bayesiano em jogos sequenciais de informação incompleta. Esse será nosso próximo tema.

O Equilíbrio Perfeito Bayesiano em Jogos Sequenciais de Informação Incompleta

Vamos exemplificar o equilíbrio perfeito bayesiano por meio de um jogo muito simples. Considere uma situação de interação estratégica em que uma empresa oferece um contrato de prestação de serviços a outra empresa. Vamos chamar a empresa que oferece o contrato de Prestadora e a empresa à qual o contrato é oferecido de Contratante.

A empresa Prestadora pode ser de dois tipos: uma empresa confiável, que possui um comportamento profissional e honra seus compromissos na data correta, ou uma empresa não-confiável, que pratica *hold-up* uma vez o contrato assinado, isto é, atrasa a prestação do serviço para barganhar melhores condições no contrato. Vamos chamar o tipo de empresa que é confiável e não pratica *hold-up* de tipo *confiável*, e o tipo de empresa que pratica *hold-up* de tipo *não confiável*.

Apenas a Prestadora conhece seu verdadeiro tipo. A Contratante sabe apenas qual é a probabilidade, dadas as características desse tipo de empresa e o local em que ela atua, de a Prestadora ser do tipo confiável ou do tipo não-confiável. Digamos que a probabilidade de a Prestadora ser do tipo confiável seja p e a probabilidade dela ser do tipo não-confiável seja $(1 - p)$.

Seja qual for o tipo da Prestadora, ela possui duas ações possíveis: oferecer ou não oferecer o contrato à Contratante. Se a Prestadora decidir não oferecer o contrato, nada acontece e nenhum dos dois jogadores perde ou ganha nada. Por outro lado, se a Prestadora decidir oferecer o contrato, é a vez da Contratante decidir o que fazer.

Após a Prestadora oferecer o contrato à Contratante, esta última possui duas alternativas: aceitar ou não aceitar o contrato. Se a Contratante decide não aceitar o contrato, nada acontece e a Prestadora recebe uma recompensa de -1, qualquer que seja o seu tipo. Isso porque estamos supondo que a Prestadora possui um custo por oferecer o contrato à Contratante, e se o contrato é rejeitado, a Prestadora tem de arcar com esse custo sem nenhum retorno. Se, por outro lado, a Contratante aceita o contrato, a prestadora tem um ganho de 1, também independentemente do seu tipo.

Porém, a recompensa da Contratante vai variar de acordo com o tipo da prestadora, caso ela decida aceitar o contrato: 2, no caso de Prestadora ser do tipo confiável, e -2, se a prestadora for do tipo não-confiável, uma vez que,

sendo a empresa Prestadora uma empresa que pratica *hold-up*, o Contratante pagará mais caro pelo serviço ou terá algum custo decorrente do conflito durante a prestação do serviço. Se decidir rejeitar o contrato, a recompensa da Contratante será zero, independentemente do tipo da Prestadora.

Vamos representar essa situação de interação estratégica, em que a Prestadora possui informação privada acerca do seu tipo, supondo, da mesma forma que fizemos no capítulo anterior, que um pseudojogador, a Natureza, faz o primeiro movimento, escolhendo o tipo de Prestadora. Apenas a Prestadora observa esse movimento da Natureza, e decide então se oferece ou não o contrato. A Contratante decide então se aceita, ou não, o contrato oferecido pela Prestadora, sem conhecer o tipo desta última.

Essa situação de interação estratégica é descrita na Figura 9.4, na qual denominamos a situação de interação estratégica entre Prestadora e Contratante de jogo da contratação:

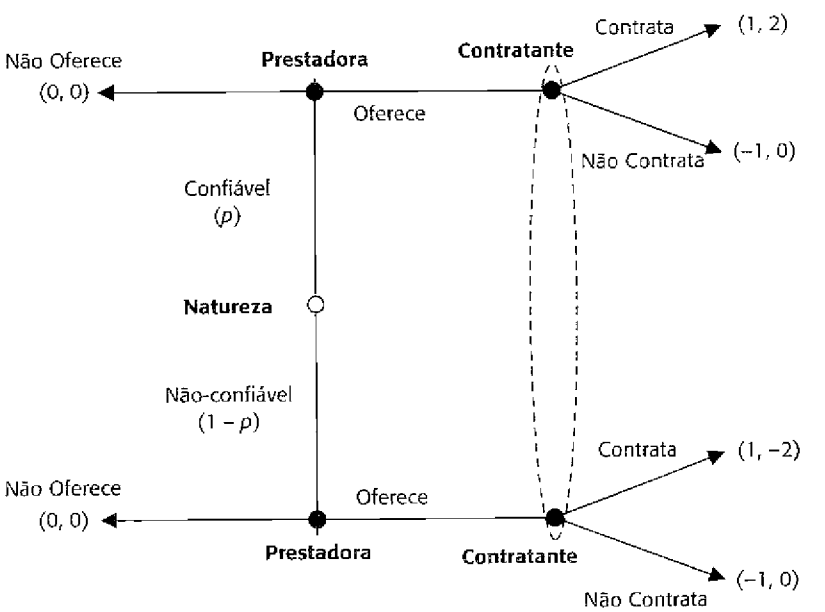


Figura 9.4 Jogo da Contratação

O leitor pode estar se perguntando se não seria o caso de investigar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, uma vez que esse jogo é sequencial. Isso parece fazer sentido, visto que a Contratante decide se aceita o não o contrato *depois* de observar se a Prestadora ofereceu ou não seus serviços.

Contudo, o leitor também poderá perceber rapidamente que *o jogo da contratação da Figura 9.4 não possui subjogos próprios*. Há apenas um subjogo,

que é o jogo inteiro. Portanto, todos os equilíbrios de Nash do jogo da contratação da Figura 9.4 que porventura existam são, *automaticamente*, equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos e não temos como eliminar nenhum equilíbrio, como fazemos quando buscamos os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos.

Precisamos assim de um outro conceito que dê conta desse problema. Falando de uma forma geral, precisamos de um conceito que capture a **racionalidade sequencial** dos jogadores, ou seja, *o fato de que os jogadores procuram maximizar suas recompensas a partir de cada conjunto de informação em que eles estejam*.

Por conseguinte, devemos utilizar um conceito de equilíbrio que isole e examine todos os conjuntos de informação, para análise. Essa é a característica do equilíbrio perfeito bayesiano, que conjuga uma combinação de estratégias com uma descrição das crenças que os jogadores possuem em cada conjunto de informação. Essas crenças representam as **avaliações** do jogador acerca dos tipos dos outros jogadores, condicionada ao fato de que uma determinada etapa do jogo foi alcançada.

Vamos retornar ao jogo da contratação da Figura 9.4. No jogo da contratação a Contratante apenas sabe que a Prestadora pode ser do tipo confiável com probabilidade p e pode ser do tipo não-confiável com probabilidade $(1 - p)$. A crença de que a Prestadora pode ser do tipo confiável com probabilidade p é a **crença inicial** da Contratante quanto ao *tipo* da Prestadora, *não quanto à sua estratégia*.

A Contratante não consegue observar o tipo da Prestadora, que foi escolhido pela Natureza e é informação privada da Prestadora. Contudo, a Contratante pode observar se a Prestadora oferece ou não um contrato. Isso é muito importante, pois permite à Contratante aprender algo acerca do tipo da Prestadora, apenas observando a ação escolhida por ela. Em função disso, a Contratante terá uma **crença atualizada** a respeito da Prestadora.

Para ilustrar o que estamos querendo dizer, imagine que a Prestadora se comporte da seguinte maneira: ela apenas envia uma proposta de contrato caso seja do tipo não-confiável. Nesse caso, ao receber uma proposta de contrato, a Contratante saberia estar lidando com uma empresa que pratica *hold-up*. Retornando à Figura 9.4, quando o conjunto de informação em que a Contratante decide o que fazer fosse alcançado, ela saberia estar no nó inferior do seu conjunto de informação.

Em termos mais gerais, a Contratante tem uma crença atualizada acerca do tipo da Prestadora, em termos de uma distribuição de probabilidades em relação aos nós que ela acredita ter alcançado quando é a sua vez de jogar. Essa crença atualizada está expressa na Figura 9.5, na qual q representa a

probabilidade de a Contratante acreditar estar no nó superior do seu conjunto de informação, ou seja, a probabilidade de a Contratante acreditar que a Prestadora é do tipo confiável, condicionada pelo fato de que a Contratante recebeu a proposta de contrato.

Desse modo, na Figura 9.5 indicamos com q (em negrito para se destacar no diagrama) a probabilidade de a Contratante acreditar que a Prestadora é do tipo confiável, dado que a Prestadora enviou uma proposta de contrato, e com $(1 - q)$ (também em negrito) a probabilidade de a Contratante acreditar que a Prestadora é do tipo não-confiável, condicionada pelo envio do contrato pela Prestadora.

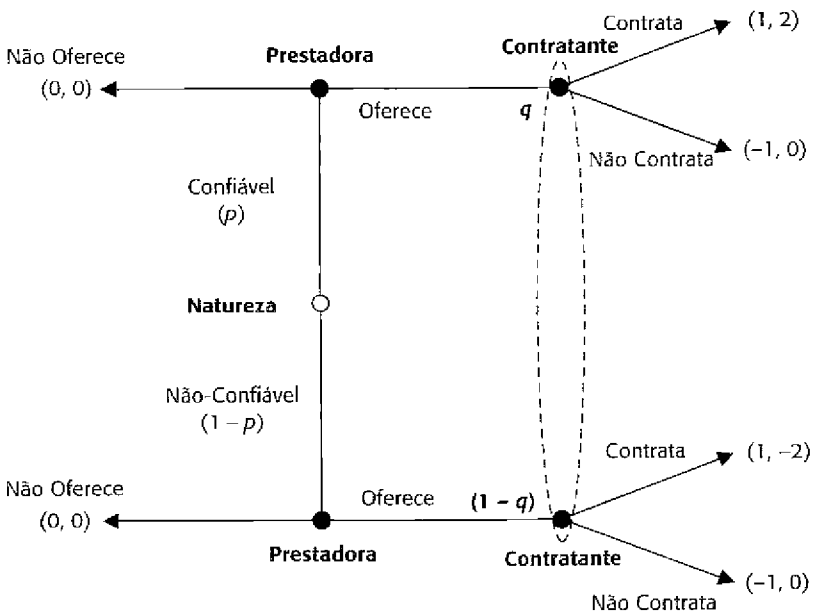


Figura 9.5 Jogo da Contratação – Crença Atualizada da Contratante

O fato importante é que a introdução da crença atualizada torna viável analisar o comportamento racional em todos os conjuntos de informação, *incluindo aqueles que nunca serão atingidos no equilíbrio do jogo*. Tanto q como $(1-q)$ terão um papel importante na análise do jogo da contratação, mesmo que a Contratante acredite que nenhum contrato será enviado por qualquer um dos dois tipos de Prestadora.

Sendo um jogador racional, a Contratante consegue formar uma crença acerca do tipo da Prestadora se receber uma proposta de contrato, mesmo que, a princípio, não aposte nessa possibilidade.

A condição para o equilíbrio é que a crença atualizada da Contratante seja consistente com as probabilidades das escolhas dos tipos da Prestadora pela Natureza e com as estratégias da Contratante. Usualmente, avaliamos a consistência entre as probabilidades atribuídas pela Natureza aos tipos da Prestadora e a crença atualizada da Contratante utilizando o teorema de Bayes, que vimos no início deste capítulo.

Para sabermos como utilizar o teorema de Bayes, vamos retornar à probabilidade q. Qual o verdadeiro sentido de q? Com efeito, a probabilidade q depende da probabilidade de que a Natureza escolha uma empresa Prestadora confiável e, uma vez escolhido esse tipo de empresa, da probabilidade de que ela decida enviar a proposta de contrato.

Se chamarmos então o tipo de empresa confiável de EC, o tipo de empresa não-confiável de ENC, e a ação de fazer a proposta de contrato de O (de {Oferece}), conclui-se que q na verdade pode ser representado por:

$$q = prob\ (EC\ /O)$$

Assim, aplicando o teorema de Bayes:

$$q = \frac{prob(EC)\,prob(O/EC)}{prob(EC)\,prob(O/EC) + prob(ENC)\,prob(O/ENC)}$$

É importante advertir que não poderemos aplicar a regra de Bayes em jogos cuja probabilidade de o nó do conjunto de informação de um dado jogador ser atingido é zero. Esse seria o caso em que, no jogo da Figura 9.4, a Prestadora empregasse sempre a estratégia (Não Oferece, Não Oferece).

Embora nesse caso ainda seja possível atribuir um sentido à probabilidade q, que seria então a probabilidade de o jogador ser surpreendido pela escolha do outro de tomar a ação que conduz o jogo ao nó cuja probabilidade é q, na verdade q poderia assumir qualquer valor, uma vez que a fórmula do teorema de Bayes não poderia ser aplicada nesse caso. Na verdade, qualquer crença atualizada é compatível com uma decisão surpreendente.

Estamos prontos para uma definição um pouco mais formal do equilíbrio perfeito bayesiano:

Uma combinação de estratégias dos jogadores, assim como as crenças em relação aos nós em todos os conjuntos de informação, é chamada um **equilíbrio perfeito bayesiano** se: (a) as estratégias de cada jogador resultam em ações ótimas, dadas a crença do jogador e as estratégias dos demais jogadores; e (b) as crenças dos jogadores são consistentes com o teorema de Bayes sempre que possível.

Antes de estudarmos essa classe de equilíbrio, é importante apresentarmos as duas formas de classificar esses equilíbrios. Chama-se um equilíbrio de **equilíbrio separador** (do inglês, *separating equilibrium*) quando os jogadores se comportam de maneira diferente no equilíbrio, de acordo com o seu tipo. Quando os jogadores se comportam da mesma maneira no equilíbrio, independentemente do seu tipo, o equilíbrio é dito **agregador** (do inglês, *pooling equilibrium*).

Não há um algoritmo para a determinação do equilíbrio perfeito bayesiano, mas alguns passos podem ajudar na determinação desse gênero de equilíbrio. Passos que apresentamos a seguir, com referência ao jogo da contratação da Figura 9.4:

1. Inicie com uma estratégia da prestadora, seja ela separadora ou agregadora.
2. Se possível, calcule q empregando o teorema de Bayes. Se não for possível, será necessário testar valores para q com os passos a seguir.
3. Dado q, calcule a ação ótima da Contratante.
4. Confira se a estratégia da Prestadora é a melhor resposta possível à ação da Contratante.

Vamos agora aplicar os três primeiros passos ao jogo da contratação da Figura 9.4. Para isso, vamos abreviar as ações da Prestadora em O de {Oferece} e em NO de {Não Oferece}. Assim, a estratégia (NO, O) significa que uma Prestadora do tipo confiável não oferece contrato e uma prestadora do tipo não-confiável oferece.

Há, portanto, quatro componentes potenciais de equilíbrios separadores e agregadores:

- Equilíbrio separador I: (NO, O), significando que uma Prestadora confiável não oferece contrato e uma Prestadora não-confiável oferece.
- Equilíbrio separador II: (O, NO), significando que uma Prestadora confiável oferece contrato e uma Prestadora não-confiável não oferece.
- Equilíbrio agregador I: (O, O), significando que tanto uma Prestadora confiável quanto uma Prestadora não-confiável oferecem contrato.
- Equilíbrio agregador II: (NO, NO), significando que tanto uma Prestadora confiável quanto uma Prestadora não-confiável não oferecem contrato.

Vamos agora aplicar o roteiro de quatro passos anterior a cada um desses equilíbrios:

- **Equilíbrio separador I:** (NO, O). Uma vez que apenas uma empresa Prestadora não-confiável oferece um contrato, temos, necessariamente, que $q = 0$. Assim, a ação ótima da Contratante é não contratar os serviços da Prestadora. Mas se a ação ótima da Contratante é não contratar, então a Prestadora vai preferir não oferecer, para não incorrer desnecessariamente no custo de elaborar e enviar o contrato (recompensa de –1 na Figura 9.4). Assim, não há um equilíbrio perfeito bayesiano em que a Prestadora jogue (NO, O).
- **Equilíbrio separador II:** (O, NO). Uma vez que apenas uma empresa confiável oferece um contrato, temos, necessariamente, que $q = 1$. Assim, a estratégia ótima da Contratante é contratar os serviços da prestadora. Mas, dada essa estratégia ótima da Contratante, o tipo de Prestadora não-confiável preferiria oferecer o contrato, em vez de não oferecer. Assim, não há um equilíbrio perfeito bayesiano em que a Prestadora jogue (O, NO)
- **Equilíbrio agregador I:** (O, O). Aqui a regra de Bayes determina que $q = p$. Assim, a Contratante escolherá como estratégia ótima contratar apenas se $2p + (-2)(1 - p) \geq 0$, uma vez que 0 é a recompensa que a Contratante obtém se ela não contrata a Prestadora, qualquer que seja o seu tipo. Portanto, é preciso que $p \geq 1/2$ para que a Contratante aceite o contrato. Se $p < 1/2$, a Contratante escolherá sempre não contratar e, em razão disso, nenhuma Prestadora de nenhum tipo desejará oferecer um contrato. Desse modo, não pode haver um equilíbrio perfeito bayesiano em que seja jogado (O, O) se $p < 1/2$. Todavia, quando $p \geq 1/2$, há um equilíbrio perfeito bayesiano representado por ((O, O), C), em que C representa a ação da Contratante de contratar a Prestadora.
- **Equilíbrio agregador II:** (NO, NO). Nesse caso, veremos, conforme vimos anteriormente, que o teorema de Bayes não determina q. Temos, portanto, de desenvolver a análise de outro modo. Observe inicialmente que (NO, NO) somente se justifica se a Contratante escolher não contratar, ou seja, a Contratante deve esperar pelo pior sempre que um contrato for oferecido. Isso se justifica se $q < 1/2$. Assim, caso $q < 1/2$, há um equilíbrio perfeito bayesiano representado por: ((NO, NO), NC), em que NC representa a ação da Contratante de não contratar a Prestadora.

No jogo da contratação, portanto, não há nenhum equilíbrio separador. A explicação para isso é que os dois tipos de jogadores possuem as mesmas preferências, o que gera dois equilíbrios agregadores.

É interessante, contudo, observar o último equilíbrio perfeito: ((NO, NO), NC) se $q < 1/2$. Obviamente há espaço aqui para uma melhoria paretiana: se as empresas confiáveis conseguissem "sinalizar" que são diferentes, de tal forma que a empresa Contratante conseguisse distingui-las, tanto as empresas confiáveis como a contratante melhorariam de situação em relação ao equilíbrio ((NO, NO), NC). Isso nos leva diretamente ao assunto seguinte: jogos de sinalização.

JOGOS DE SINALIZAÇÃO

Algumas vezes é do interesse de um dos jogadores emitir um sinal para o outro jogador, de forma que o verdadeiro tipo do jogador que emitiu o sinal se torne conhecido do outro jogador. Vimos na seção anterior que se a empresa Prestadora que não pratica *hold-up* para conseguir vantagens após o contrato ter sido assinado conseguisse informar à empresa Contratante seu verdadeiro tipo, ou seja, que ela é uma empresa confiável, tanto sua situação quanto a situação da empresa contratante melhorariam.

O leitor já deve ter percebido que esse é um problema muito comum na economia, nas empresas e até mesmo na política: como mostrar que você, a sua empresa ou o seu partido político possuem características que permitem considerá-los de um tipo mais respeitado ou mesmo valorizado?

Economistas e sociólogos há muito já perceberam, por exemplo, que além de seu valor intrínseco, a educação possui também um efeito sinalizador, especialmente no mercado de trabalho: ter o diploma de uma boa instituição de ensino pode abrir portas com uma facilidade muito maior do que a que o portador de um diploma não tão valorizado terá, ainda que, por exemplo, as notas deste último sejam superiores às notas do primeiro.

Vamos utilizar esse exemplo para iniciar nosso estudo dos jogos de sinalização. Considere um jogo com dois jogadores: o Candidato e o Empregador. O candidato busca conseguir uma vaga em um emprego, cuja contratação é responsabilidade do empregador. O candidato pode ser de dois tipos: alta produtividade e baixa produtividade. Vamos abreviar o tipo alta produtividade para AP e o tipo baixa produtividade para BP.

O empregador não conhece o tipo exato do candidato que lhe foi apresentado. O empregador apenas sabe que o candidato é do tipo AP com ¼ de probabilidade, e do tipo BP, com ¾ de probabilidade. Para estudarmos a educação como um sinal de qualidade superior do candidato, vamos supor que a Natureza, mais uma vez, faz o primeiro movimento, escolhendo o tipo do candidato, se AP ou BP. O candidato observa o movimento da Natureza e assim sabe o seu tipo.

Contudo, o empregador não o observa esse movimento da Natureza e, portanto, o tipo do candidato é informação privada do próprio candidato. Após observar o seu próprio tipo, o candidato decide se investe ou não em uma educação que é custosa, como um curso de MBA, por exemplo. Essa escolha do candidato entre investir ou não em um curso que é custoso é uma ação do candidato que pode ser observada pelo empregador. Vamos abreviar a opção pelo curso caro de MBA como PG, de pós-graduação. A escolha do candidato de não fazer o custoso curso de MBA será representada por NPG.

É a vez do empregador decidir se contrata o candidato para um cargo de chefia ou para uma posição subalterna. A remuneração líquida do candidato e o ganho do empregador em cada situação se encontram descritos na Figura 9.6. As recompensas do candidato vêm em primeiro lugar, seguidas das recompensas do empregador.

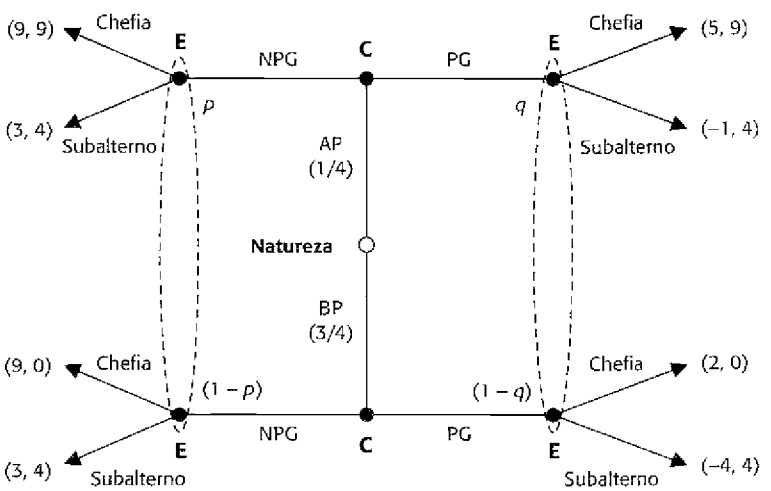


Figura 9.6 Aplicado ao Mercado de Trabalho

O diagrama da Figura 9.6 é um pouco mais complexo do que o da Figura 9.4 e, por isso, exige um pouco mais de atenção. Em função disso, também abreviamos os nomes dos jogadores para C (Candidato) e E (Empregador).

Vamos nos concentrar, inicialmente, no lado esquerdo da Figura 9.6. Os maiores ganhos para os candidatos de ambos os tipos resultam de assumir um cargo de chefia sem ter investido em educação custosa: podemos ver isso do lado esquerdo do diagrama da Figura 9.6, que corresponde, tanto no caso do candidato de AP na parte de cima, quanto no caso do candidato de BP na parte de baixo, a optar por NPG, ou seja, não investir na educação custosa. Podemos assim encontrar nos nós terminais superiores, que correspondem à ação do empregador de contratar os candidatos para cargos de chefia, a recompensa de 9.

Uma ocupação subalterna rende aos dois tipos de candidatos, desde que eles escolham NPG, ou seja, não gastar nada com um curso de pós-graduação, um rendimento bem menor, de 3. Já para o empregador, os ganhos são substancialmente maiores se ele contrata um candidato de AP para um cargo gerencial do que se ele contrata um candidato de BP para o mesmo cargo: sua recompensa de 9, no primeiro caso, é reduzida a 0.

Há, assim, um custo significativo para o empregador se ele cometer um erro. Por outro lado, se o empregador contratar o candidato de AP para uma função subalterna, ele produzirá tanto quanto um candidato de BP. Podemos imaginar que as tarefas são tão rotineiras, que o desempenho dos dois tipos de candidato se igualam.

Vamos observar agora o lado direito do diagrama da Figura 9.6: nele vemos as mesmas combinações do lado esquerdo, exceto pelo fato de que agora os dois tipos de candidatos decidiram adquirir uma educação custosa. Assim, as recompensas do empregador continuam as mesmas, apenas as recompensas dos dois tipos de candidatos se alteram.

A consequência de os dois candidatos adquirirem a educação custosa é que, quando comparadas com as mesmas situações de contratação do lado esquerdo, as possibilidades de contratação do lado direito resultam em recompensas *líquidas* bem menores para os dois tipos de candidatos.

Desse modo, por exemplo, caso o candidato de AP seja contratado para um cargo de chefia, após cursar uma pós-graduação ou um MBA, suas recompensas líquidas são bem menores: apenas 5 contra 9 se ele tivesse sido contratado para o mesmo cargo sem ter cursado o MBA ou curso de pós-graduação.

No caso do candidato de BP, a situação é ainda mais difícil: se conseguir ser contratado para um cargo de chefia, sua recompensa terá se reduzido de 9 (escolhendo NPG) para apenas 2 (se tiver cursado a pós-graduação ou MBA). O pior de tudo, porém, é se o candidato de BP tiver investido em um curso caro e for contratado apenas como um funcionário subalterno: sua recompensa se torna negativa (–4).

O leitor já deve ter percebido que a redução das recompensas do candidato de BP que investiu na educação cara foi significativamente maior do que a do candidato de AP. Por quê? A razão disso é que se presume que o candidato de BP terá maior dificuldade em obter o certificado de conclusão ou diploma: levará mais tempo, possivelmente repetirá algumas matérias etc. Com isso, seu custo acaba sendo maior.

Uma última premissa importante do modelo é de que a educação custosa que pode ser adquirida pelos dois tipos de candidato não tem nenhuma utilidade

para o empregador. Sua única utilidade, como veremos, será para sinalizar qual é o tipo do candidato que foi apresentado ao empregador.

Vamos analisar, assim, os possíveis equilíbrios perfeitos do jogo da Figura 9.6. Vamos analisar, inicialmente, o equilíbrio agregador que contenha a estratégia do candidato (PG, PG), em que a primeira ação corresponde à ação do tipo AP e a segunda ação corresponde à ação do tipo BP.

Mas um equilíbrio com (PG, PG) só é consistente com uma crença do empregador de que $q = 1/4$: uma vez que ambos os jogadores adotam a educação cara, isso significa que o empregador não tem como formar outra expectativa acerca do nó em que ele pode estar além da distribuição que já existe entre os dois tipos.

O problema é que se $q = 1/4$, então a recompensa esperada do empregador por contratar o candidato para um cargo de chefia será de: $9\ (1/4) + 0\ (3/4) = 9/4$, mas a recompensa por contratar o candidato para um cargo subalterno será de: $4\ (1/4) + 4\ (3/4) = 4$ – maior do que a anterior. Assim, se $q = 1/4$, a ação ótima para o empregador será contratar o candidato apenas para cargos subalternos.

Mas um cargo subalterno é pior para o candidato de BP após escolher PG do que o mesmo cargo após escolher NPG. Desse modo, não há equilíbrio agregador em que o candidato de BP escolha PG. Mas e quanto a um equilíbrio agregador em que os dois candidatos escolham NPG?

Se ambos os candidatos escolhem NPG, estamos do lado esquerdo do diagrama da Figura 9.6, e, assim como estávamos antes no caso em que os dois tipos de candidatos escolhiam PG, o empregador mais uma vez não tem como aprender nada a respeito do tipo do candidato e sua crença atualizada atribui um p ao nó superior do lado esquerdo que somente pode ser $p = 1/4$.

O leitor pode se certificar que, para $p = 1/4$, a melhor ação para o empregador é contratar para o cargo subalterno. Nesse caso, o candidato de BP não tem razão nenhuma para se desviar da sua escolha de NPG: uma vez que ele vai ser contratado para um cargo subalterno, não há razão para investir em educação cara. Mas e quanto ao candidato de AP? Por que ele não investiria em educação de alta qualidade, ainda que cara?

Se $p = 1/4$, isso significa que o empregador não consegue discernir entre um candidato de AP ou de BP pela ausência de um curso de excelência caro em seu currículo: sua crença atualizada atribui uma chance de estar no nó superior esquerdo que é apenas a repetição da participação do tipo de AP na população de candidatos. Se o empregador não consegue distinguir um tipo do outro pelo fato de o candidato não ter o curso custoso, também não conseguirá discernir no caso de possuir o título do curso caro. Assim, não valerá a pena para o candidato de AP investir na sua educação.

Mas e quanto a q nesse caso? Qual será o valor de q nesse equilíbrio agregador ((NPG, NPG), (Subalterno, Subalterno))? Lembre-se de que um equilíbrio bayesiano perfeito exige que sejam definidas não apenas as estratégias dos jogadores, mas também suas crenças. Como o nó superior direito nunca é atingido, basta que especifiquemos um valor de q que seja compatível com o empregador escolhendo um cargo subalterno.

Assim, é fácil observar na Figura 9.6 que do lado direito do diagrama o empregador sempre escolherá contratar para um cargo subalterno se:

$$9q + 0\,(1-q) < 4q + 4\,(1-q)$$

Ou seja, desde que:

$$q < \frac{4}{9}$$

Assim, temos um equilíbrio agregador em que ((NPG, NPG), (Subalterno, Subalterno)), em que o primeiro {Subalterno} corresponde ao caso em que o candidato é de AP, $p = 1/4$ e $q < 4/9$.

Vejamos agora o equilíbrio separador em que (NPG, PG), ou seja, em que o candidato de AP não investe em educação dispendiosa enquanto o candidato de BP o faz. A crença consistente com um equilíbrio assim seria $p = 1$ e $q = 0$. Com isso, o empregador adotaria (Chefia, Subalterno), significando que ele contrataria para chefia aquele candidato que não possui curso de excelência de alto custo. Nesse caso, adotar PG não seria uma ação ótima para o candidato de BP, e (NPG, PG) não pode fazer parte de um equilíbrio.

Por último, resta o equilíbrio separador que contenha (PG, NPG). Essa combinação exige que $p = 0$ e $q = 1$. A estratégia de equilíbrio do empregador será, portanto, (Chefia, Subalterno) e, assim, o equilíbrio separador será ((PG, NPG), (Chefia, Subalterno)) com $p = 0$ e $q = 1$.

Esse jogo que acabamos de discutir é uma versão estilizada do jogo conhecido na literatura como modelo de Spence, em homenagem ao economista Michael Spence (que voltará a ser citado neste capítulo, pois dividiu o Prêmio Nobel de Economia em 2001 com outro economista que citaremos em breve: George A. Akerlof), que formulou pela primeira vez esse modelo em que a educação é utilizada não por seu valor intrínseco para o aumento da produtividade, mas por seu valor como sinal da qualidade do trabalhador.[1] O exercício 9.3 ajuda a fixar os conceitos desse tipo de modelo.

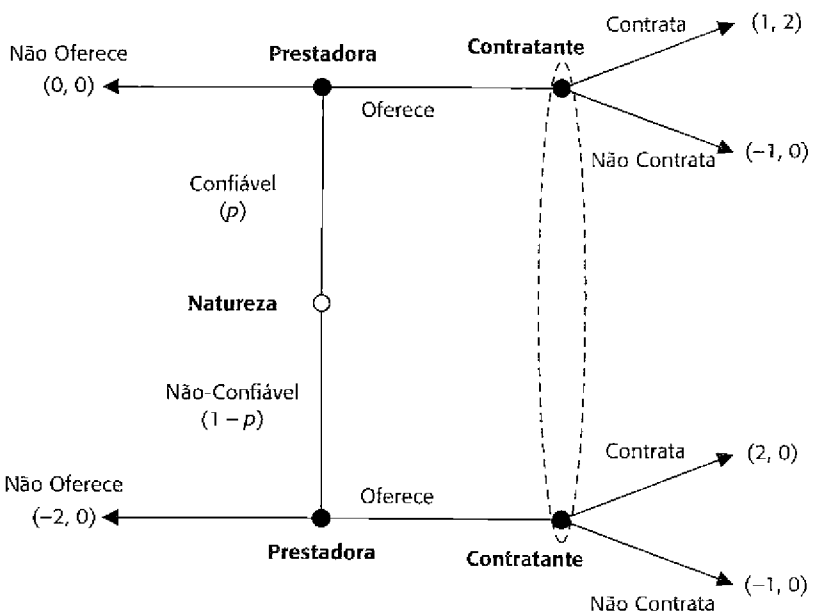
---

1 Ver seu artigo clássico, "Job Market Signaling", *The Quarterly Journal of Economics*, v. 87, n. 3, agosto de 1973, p. 355-374.

EXERCÍCIOS

9.1 No jogo da contratação da Figura 9.5, calcule os valores de q para os quais contratar é a escolha ótima da contratante; os valores para os quais não contratar passa a ser a escolha ótima; e os valores para os quais para a contratante é indiferente contratar ou não a prestadora para o caso em que os dois tipos de prestadores oferecem contrato.

9.2 Reconsidere o jogo da contratação na reformulação a seguir:



Avalie se esse jogo possui algum equilíbrio separador ou agregador.

9.3 Considere uma economia com dois tipos de jovens executivos: os jovens executivos pouco produtivos, que têm uma função de recompensa dada por $U_1 = w - 0{,}5t^2$, e os jovens executivos muito produtivos, com função de recompensa dada por por $U_2 = w - 0{,}25t^2$, onde w é o salário, e t, o número de anos de estudo do executivo no seu MBA. A empresa que deseja contratar os jovens executivos está disposta a pagar $w = 2t$ para um jovem executivo muito produtivo e $w = t$ para um executivo pouco produtivo. Pede-se:

a. Calcular o número de anos de estudo na solução eficiente, quando a empresa sabe exatamente a qual tipo o candidato entrevistado pertence (sugestão: maximize a função de recompensa de cada tipo, substituindo o salário correspondente, e aplique a condição de primeira ordem).

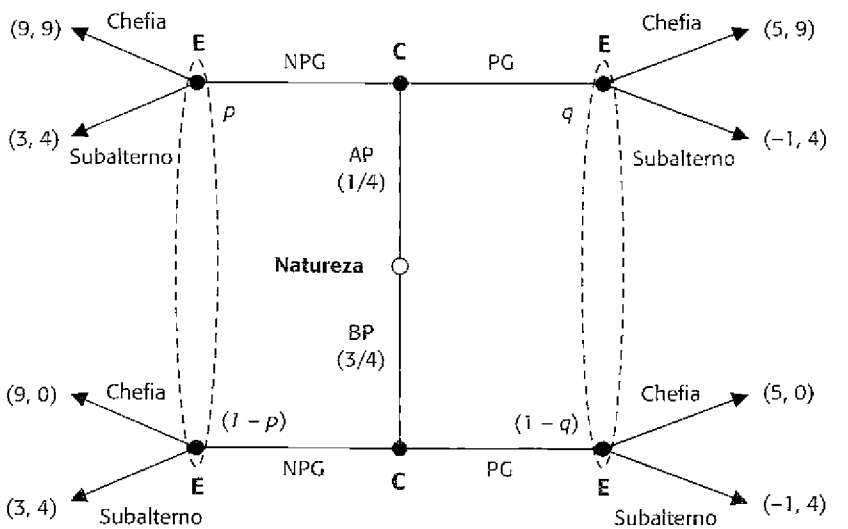
b. Calcular o equilíbrio agregador, supondo que há ¼ de jovens executivos produtivos e ¾ de jovens executivos pouco produtivos.

9.4 Considere uma situação em que existem dois tipos de uma mesma empresa: uma empresa de baixa qualidade (BQ) com probabilidade p e uma empresa de alta qualidade (AQ) com probabilidade $(1 - p)$. O verdadeiro tipo da empresa é informação privada da empre-

sa. A empresa escolhe oferecer emprego (E) a um trabalhador, ou não oferecer emprego (NE). Se não é oferecido emprego, o jogo termina e os dois jogadores, a empresa e o trabalhador nada recebem. Se a empresa oferece um emprego, o trabalhado decide se aceita (S) ou rejeita a oferta (N). Se o trabalhador rejeita o emprego, a empresa obtém uma recompensa de −1 e o trabalhador obtém uma recompensa de 0. Se o trabalhador aceita a oferta, a empresa obtém uma recompensa de 3, mas a recompensa do próprio trabalhador depende do tipo da empresa: se ela for de alta qualidade, ele obterá uma recompensa de 2, mas se ela for de baixa qualidade, ele obterá uma recompensa de −1. Pede-se:

a. Representar a situação anterior em um diagrama.
b. Investigar todos os equilíbrios separadores e agregadores que porventura existam.

9.5 Considere agora que as recompensas no jogo de sinalização da Figura 9.7 fossem na verdade dadas por:

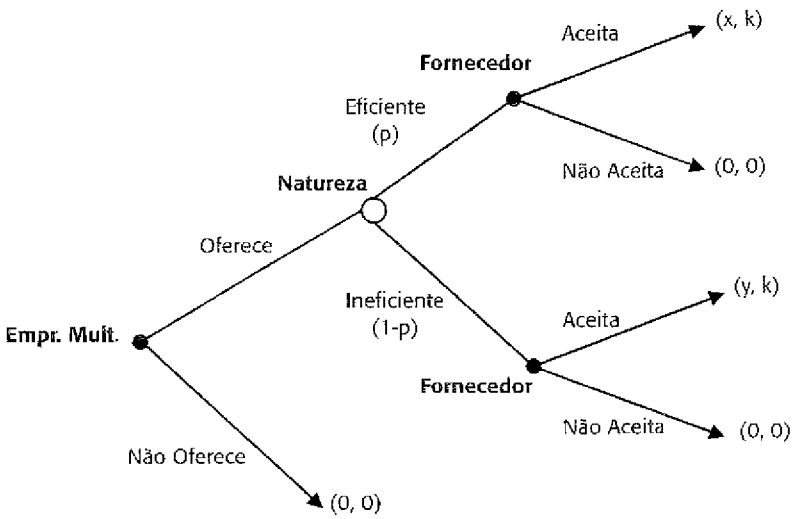


Verifique quais são os equilíbrios perfeitos bayesianos nesse caso, descrevendo-os completamente (combinação de estratégias e crenças). Há algum equilíbrio separador ou agregador?

9.6 A certificação ISO em sistemas da qualidade se difundiu e generalizou entre as empresas brasileiras durante os anos 90. Passou-se a divulgar a posse do certificado, não obstante a certificação não garanta a qualidade do produto, mas apenas que determinadas pré-condições para um produto de boa qualidade foram adotadas pela empresa. Como você analisaria isso à luz do jogo de sinalização que vimos?

9.7 Nós vimos nos jogos de sinalização que, algumas vezes, enviar um sinal para o outro jogador é do interesse de um dos jogadores, para que o verdadeiro tipo do jogador que emitiu o sinal se torne conhecido do outro jogador. Contudo, algumas vezes ocorre o contrário: o jogador que *não* possui informação é que faz o primeiro movimento. Imagine o caso de uma empresa multinacional que visa contratar um fornecedor estrangeiro, sobre o qual ela não tem informações precisas: usualmente é a empresa multinacional que faz a oferta do con-

trato antes de conhecer exatamente as características de seu fornecedor. Se o fornecedor estrangeiro e sua cadeia forem eficientes e de baixo custo, a empresa multinacional irá realizar um lucro. Contudo, se o fornecedor e sua cadeia forem ineficientes, a empresa multinacional irá realizar um prejuízo. Trata-se de uma situação que pode ser analisada como o jogo da Figura a seguir.



Na figura anterior a empresa multinacional faz o primeiro movimento: ela decide se oferece ou não um contrato ao fornecedor estrangeiro. Se decidir não oferecer o contrato, nem ela nem o fornecedor estrangeiro têm qualquer ganho, e suas recompensas são dadas por (0, 0). Caso ela decida oferecer o contrato, a Natureza escolhe então qual será o verdadeiro tipo do fornecedor estrangeiro, que é desconhecido pela empresa multinacional. A Natureza escolhe se ele é eficiente (com probabilidade p), ou ineficiente (com probabilidade $1 - p$). Se o fornecedor estrangeiro for eficiente e aceitar o contrato, a empresa multinacional realiza um lucro igual a x e o fornecedor estrangeiro também realiza um ganho positivo (igual a k). Contudo, se a Natureza tiver escolhido um fornecedor ineficiente, ele realizará ainda o mesmo ganho de k, enquanto que a empresa multinacional terá uma recompensa menor igual a $y < x$. Para qual valor de p a empresa multinacional irá preferir contratar o fornecedor estrangeiro a não contratar?

9.8 Considerando o exercício 9.7, mostre que se $y = -x$, então basta que $p > ½$ para a empresa multinacional contratar o fornecedor estrangeiro.

9.9 Suponha que o jogo do exercício 9.7 representa a situação não de uma, mas de várias empresas multinacionais que têm de contratar fornecedores estrangeiros. Caso $p > ½$ no exercício anterior, o equilíbrio será agregador ou separador? Justifique sua resposta.

9.10 Se $p < ½$, o que você teria a dizer sobre o futuro do mercado analisado no exercício anterior?

Respostas de Exercícios

CAPÍTULO 1

1.1) Sim, pois é completa e transitiva. É completa porque, dados dois números quaisquer a e b, temos que ou $a \geq b$, ou $b \geq a$, ou ambos. É transitiva porque, dados três números quaisquer, a, b e c, se $a \geq b$ e $b \geq c$ então, necessariamente, $a \geq c$.

1.2) A relação de preferência estrita não é completa, pois no caso em que a relação entre dois elementos quaisquer x e y é de indiferença, ou seja, se tivermos $x \sim y$, não temos nem $x \succ y$ e nem $x \prec y$. Porém a relação de preferência estrita é transitiva: entre três elementos quaisquer x, y e z, se $x \succ y$ e $y \succ z$, então necessariamente $x \succ z$.

1.3) A relação de indiferença não é completa: se, entre dois elementos quaisquer x e y a relação é de preferência estrita, ou seja, se tivermos $x \succ y$, ou $x \prec y$, não temos assim $x \sim y$ Porém, a relação de indiferença é transitiva: entre três elementos quaisquer x, y e z, se $x \sim y$, e $y \sim z$, então necessariamente $x \sim z$.

1.4) a) $(1,5) \succ (3,2) \succ (4,0)$
b) $U(x,y) = x + 2y$

1.5) Sim, pois ele foi capaz de expressar suas preferências em relação a todas as sobremesas, e preservou a transitividade nestas preferências.

CAPÍTULO 2

2.1) Para responder à pergunta, devemos examinar quais transformações alteram a ordem natural das recompensas.

a) Esta transformação não altera o jogo original: se $y > x$, também $3(y) - 17 > 3(x) - 17$.

b) Esta transformação não altera o jogo original: se $y > x$, também $y^3 > x^3$.

c) Nesse caso não é sempre verdade que $f(x) > f(y)$, pois se $x > y$, com $y < 0$, ainda assim podemos ter $y^2 > x^2$, caso seja verdade que $|y| > |x|$. Por exemplo, se $x = 2$ e $y = -3$, teremos $f(y) = y^2 = 9$ e $f(x) = x^2 = 4$, teremos, o que inverterá a ordem original das recompensas. Logo, essa transformação altera o jogo original.

d) Basta ver que se, por exemplo, $x = 4$ e $y = 3$, $f(x) = -\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{16}$ enquanto que $f(y) = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$. Como -1/16 > -1/8, o jogo original não foi alterado. Também temos que se $x > y$, mas $y < 0$ e $|y| > |x|$, como no caso em que $x = 2$ e $y = -3$, $f(x) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ enquanto que $f(y) = -\frac{1}{2^3} = -8$. Como $-1/4 > -8$, o jogo original não foi alterado.

e) Vamos considerar o caso em que $x > y$, mas $y < 0$ e $|y| > |x|$, como no caso em que $x = 2$ e $y = -3$. Nesse caso temos que: $f(x) = -\left(\frac{1}{2^2}\right) = -\frac{1}{4}$ enquanto que $f(y) = -\left(\frac{1}{-3^2}\right) = -\frac{1}{9}$. Como $-1/9 > -1/4$, a ordem original do jogo não foi preservada.

f) Dado que não pode haver logaritmo de número negativo, a transformação proposta respeita o jogo original apenas se as recompensas forem todas positivas.

2.2) Basta aplicar os exemplos das respostas à questão anterior à fórmula apresentada no enunciado do exercício para encontrar as respostas a esse exercício. Assim, sejam dois números quaisquer x e y pertencentes ao conjunto dos números reais. Então, para que não haja alteração na ordem das recompensas, a transformação deve ser tal que:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

Ou seja, o sinal de y – x deve ser igual ao sinal de f(y) – f(x).

2.3) As respostas a cada item se encontram abaixo:

a) Empresa Azul = {Compra, Não Compra}, Empresa Vermelha = {Toma Pílula Envenenada, Não Toma Pílula Envenenada}.

b) Empresa Azul = {Compra, Não Compra}, Empresa Vermelha = {Toma Pílula Envenenada, Não Toma Pílula Envenenada}.

c) Empresa Azul = {Compra, Não Compra}, Empresa Vermelha = {(Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Compra, Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Não Compra), {(Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Compra, Não Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Não Compra), {(Não Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Compra, Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Não Compra), {(Não Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Compra, Não Toma Pílula Envenenada se a Empresa Azul Não Compra)}

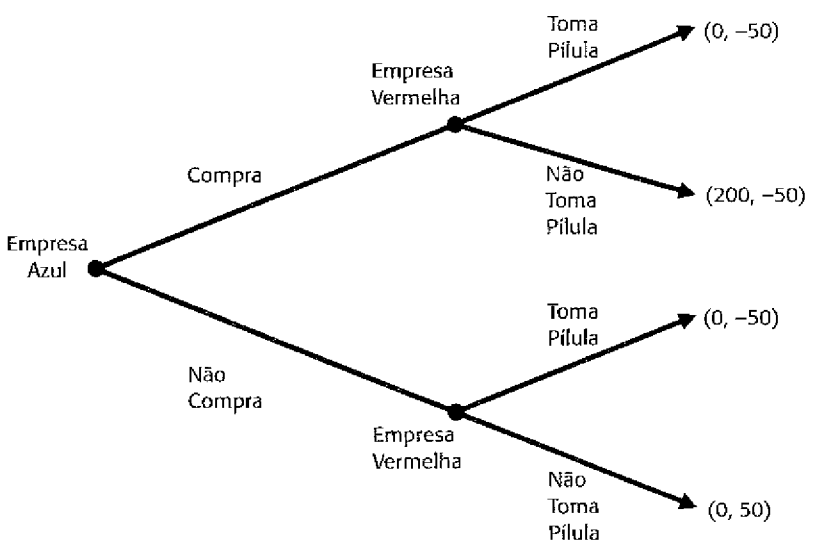
d) O modelo em sua forma estratégica para um jogo simultâneo é apresentado abaixo, com as recompensas em milhares:

Empresa Azul	Executivos da Empresa Vermelha	
	Tomam Pílula Envenenada	Não Tomam Pílula Envenenada
Compra	0, –50	200, – 50
Não Compra	0, –50	0, 50

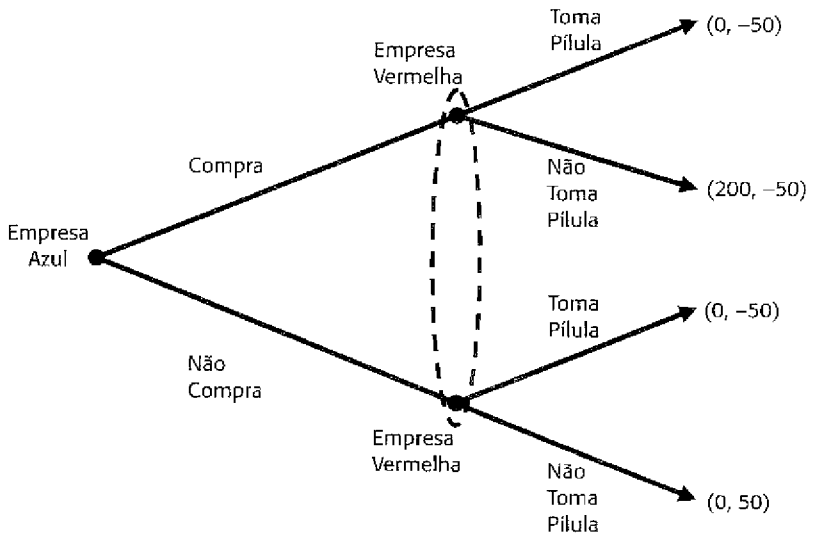
e) O modelo em sua forma estratégica para um jogo sequencial é apresentado abaixo, com as recompensas em milhares:

Empresa Azul	Executivos da Empresa Vermelha			
	Tomam Pílula Envenenada, Tomam Pílula Envenenada	Tomam Pílula Envenenada, Não Tomam Pílula Envenenada	Não Tomam Pílula Envenenada, Tomam Pílula Envenenada	Não Tomam Pílula Envenenada, Não Tomam Pílula Envenenada
Compra	0, –50	0, – 50	200, – 50	200, – 50
Não Compra	0, –50	0, 50	0, -50	0, 50

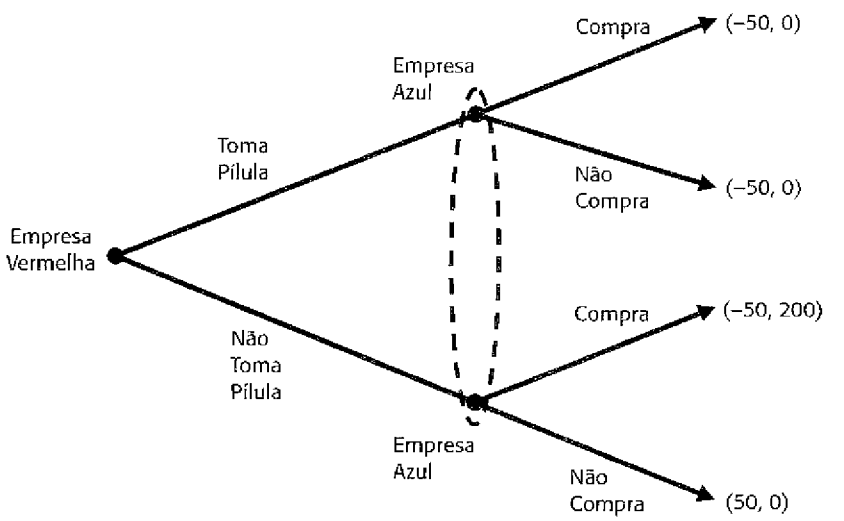
f) O modelo em sua forma estendida para um jogo sequencial é apresentado abaixo, com as recompensas em milhares:



g) O modelo em sua forma estendida para um jogo simultâneo é apresentado a seguir, com as recompensas em milhares:



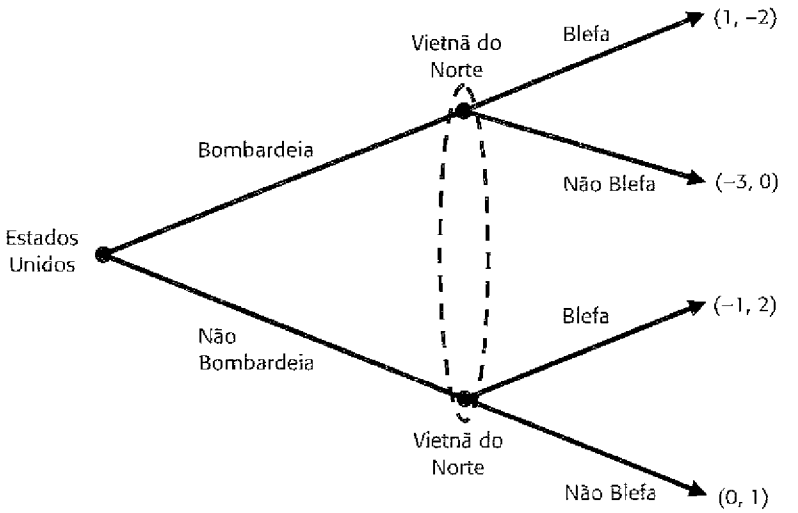
Observe ainda que por se tratar de um jogo simultâneo, ele também pode ser representado da seguinte forma (atente para a mudança na ordenação das recompensas):



2.4) a) a representação do jogo em forma estratégica se encontra abaixo:

	Vietnã do Norte	
Estados Unidos	**Blefa**	**Não Blefa**
Bombardeia	1, –2	–3, 0
Não Bombardeia	–1, 2	0, 1

b) O mesmo jogo na forma estendida:



2.5)

	Vendedor 2	
Vendedor 1	**Aborda**	**Não aborda**
Aborda	−1, −1	1, −1
Não aborda	−1, 1	0, 0

2.6) a) Não viola qualquer regra; b) Viola a regra de que cada nó deve ter como antecessor apenas um nó; c) viola a regra de que nenhuma trajetória pode ligar um nó a ele mesmo.

2.7) a) viola a condição de que um conjunto de informação não pode conter nós que pertençam a jogadores diferentes; b) Não viola nenhuma condição; c) Viola a condição de que os nós de um mesmo conjunto de informação não podem anteceder conjuntos diferentes de ações.

2.8) Os itens da questão se encontram respondidos abaixo:

a) O conjunto de ações do jogador I = {L(1), R(1), L(2), R(2)}. O conjunto de ações do jogador II = {A, B}.

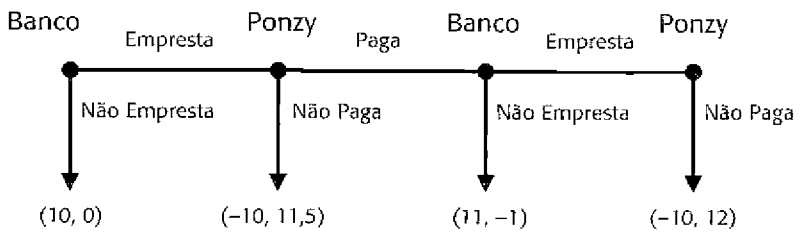
b) As estratégias do jogador I = {(L(1), L(2)); (L(1), R(2)); (R(1), L(2)); (R(1), R(2))}. As estratégias do jogador II = {A, B}.

c) Um exemplo de combinação de estratégias seria: {(L(1), L(2)), A}.

d) O jogo em sua forma estratégica é dado por:

I	II	
	A	B
L(1), L(2)	6, −1	7, 0
L(1), R(2)	3, 4	7, 0
R(1), L(2)	9, 0	9, 0
R(1), R(2)	9, 0	9, 0

2.9) Eis o jogo entre o Banco e a empresa Ponzy, apresentado na sua forma estendida:



2.10) Inicialmente, vejamos o Jogo 1 na forma estratégica:

Helena	Laura			
	w, w	w, z	z, w	z, z
I	2, 0	2, 0	1, 1	1, 1
II	1, 1	0, 0	1, 1	0, 0

Vejamos agora o Jogo 2 na forma estratégica:

Laura	Helena			
	I, I	I, II	II, I	II, II
w	2, 0	2, 0	1, 1	1, 1
z	1, 1	0, 0	1, 1	0, 0

CAPÍTULO 3

3.1) Para o jogador nas colunas, podemos eliminar tanto a estratégia B (1) (estritamente dominada pela estratégia B (2)) quanto a estratégia B (4) (estritamente dominada pela estratégia B (3)). Agora, tanto a estratégia A (1) quanto a estratégia A (2) são estritamente dominadas por A (3) para o jogador que está nas linhas. Na última etapa, B (3) é estritamente dominada por B (2) para o jogador que se encontra nas colunas. Resulta assim um equilíbrio em estratégias estritamente dominadas com uma combinação de estratégias dada por: (A (3), B (2)).

3.2) a) Vejamos inicialmente os equilíbrios de Nash nesse jogo:

	i	ii	iii
I	(I) 1, 1 (c)	(I) 1, ½	(I) 2, 0
III	(I) 1, 0	0, 1	(I) 2, 2 (c)

Há, assim, dois equilíbrios de Nash neste jogo: (I, i) e (III, iii).

b) É fácil ver que ao eliminarmos a estratégia III do jogador que está nas linhas, a qual é fracamente dominada por I, eliminamos também o equilíbrio de Nash (III, iii).

3.3)

a) Não há nenhuma estratégia estritamente dominante para qualquer um dos dois jogadores.

b) Há dois equilíbrios de Nash: (S', s') e (S", s").

c) Apenas (S', s') é ótimo de Pareto, pois é impossível melhorar a situação de qualquer um dos dois jogadores.

3.4)

a) A estratégia 2 é estritamente dominante em relação à estratégia 1 do jogador que está nas colunas.

b) Há apenas um equilíbrio de Nash: (II, 2).

c) O equilíbrio (II, 2) é ótimo de Pareto.

d) O equilíbrio (II, 2) é estrito de Nash.

3.5)

a) Falso. Se o jogador β jogar β_1, α_1 resulta em uma recompensa para o jogador α maior do que α_2.

b) Falso: (α_1, β_1) também é um equilíbrio de Nash.

c) Verdadeiro, uma vez que nenhum dos dois jogadores possui estratégia estritamente dominada que possa ser eliminada.

d) Falso, pois os dois equilíbrios não exigem que os jogadores joguem as mesmas estratégias, o que é a base da ideia de "coordenação".

3.6)

a) Falsa: a melhor resposta para o Agente 1 se o Agente 2 jogar "d" é jogar "b" e não "a".

b) Verdadeiro: (b, d).

c) Verdadeiro.

d) Falso, os jogadores não têm de "descoordenar" suas ações.

3.7)

a) Falso: apenas b é dominante.

b) Verdadeiro.

c) Verdadeiro: é impossível melhorar a situação de um jogador sem piorar a do outro (compare com o equilíbrio de Nash (B, b)!).

d) Verdadeiro. Há apenas um equilíbrio de Nash: (B, b). Como é impossível, *a partir de* (B, b) melhorar a situação de um jogador sem piorar a do outro, esse único equilíbrio de Nash é eficiente no sentido de Pareto.

3.8)

a) Falso: y é uma estratégia dominante, mas o mesmo não vale para a.

b) Verdadeiro.

c) Falso, uma vez que há um equilíbrio de Nash nesse jogo.

d) Verdadeiro: a partir do único equilíbrio de Nash nesse jogo (b, y) é impossível melhorar a situação de qualquer jogador.

e) Falso: (a, x) não é um equilíbrio de Nash.

3.9)

a)

	Jogador 2			
Jogador 1	**I, I**	**I, II**	**II, I**	**II, II**
a	0, 0	0, 0	1, 1 (c)	1, 1 (c)
b	(l) 2, 2	(l) 3, 4 (c)	(l) 2, 2	(l) 3, 4 (c)

Há dois equilíbrios de Nash: (b; I, II) e (b; II, II). Note que "b" é estritamente dominante em relação a "a" para o Jogador 1: não importa o que o Jogador 2 faça, "b" sempre irá lhe proporcionar uma resultado melhor.

b)

Jogador 1	Jogador 2			
	I, III	I, IV	II, III	II, IV
a, c	3, 3	(l) 3, 3	5, 4 (c)	(l) 5, 4 (c)
a, d	3, 3	(l) 3, 3	5, 4 (c)	(l) 5, 4 (c)
b, c	(l) 6, 2 (c)	2, 2 (c)	(l) 6, 2 (c)	2, 2 (c)
b, d	2, 6 (c)	2, 2	2, 6 (c)	2, 2

Há então 4 equilíbrios de Nash: ((a, c), (II, IV)), ((a, d), (II, IV)), ((b, c), (I, III)), ((b, c), (II, III)).

c)

	Jogador 2	
Jogador 1	**I**	**II**
a, c, e	3, 3 (c)	(l) 5, 1
a, c, f	3, 3 (c)	(l) 5, 1
a, d, e	3, 3	3, 6 (c)
a, d, f	3, 3	3, 6 (c)
b, c, e	4, 2 (c)	2, 2 (c)
b, c, f	(l) 9, 0	2, 2 (c)
b, d, e	4, 2 (c)	2, 2 (c)
b, d, f	(l) 9, 0	2, 2 (c)

d)

Jogador 1	Jogador 2	
	I	II
a	2, 1	1, 2 (c)
b	(I) 6, 8 (c)	4, 3
c	2, 1	(I) 8, 7 (c)

Esse jogo não possui dois equilíbrios de Nash: (b, I) e (c, II).

3.10) a)Falso. b) Falso. c) Falso. d) Falso. e) Verdadeiro.

CAPÍTULO 4

4.1) Cada empresa produzirá 80 unidades, o preço será de $ 42 e o lucro de cada empresa $ 3.200.

4.2) a) $q = 120$, $p = \$ 62$ de onde o lucro da empresa será $ 7.200.

b) $q_i = (A - c)/b(n+1) = (122 - 2)/0{,}5(40) = 6$. Temos então que $p = \$ 5$ e o lucro de cada uma das 39 empresas será = $ 18.

4.3) $q_1 = 81{,}3$; $q_2 = 80{,}3$; $p = \$41{,}2$; $\Pi_1 = \$ 3.308{,}91$ e $\Pi_1 = \$ 3.228{,}06$.

4.4) Como o custo da Empresa 2 é sempre superior ao custo da Empresa 1, a Empresa 1 proporia que a Empresa 2 não operasse e que apenas ela operasse. Comportando-se como um monopolista a Empresa 1 venderia 121,5 unidades, o preço do mercado seria de $ 61,20 e seu lucro seria de $ 7.375,05. Assim, ela poderia oferecer à Empresa 2 uma compensação ligeiramente superior ao lucro competitivo (o lucro no modelo de Cournot) para a empresa 2 não operar, por exemplo, $ 3.229. Com isso, ainda teria um lucro de $ 7.375,05 – $ 3.229 = $ 4.146,05. Isso valeria a pena para a empresa 1, pois, mesmo com a compensação para a Empresa 2, o lucro da Empresa 1 ainda seria maior do que o lucro competitivo do modelo de Cournot ($ 3.308,91).

4.5) a) $Q = 55$ é a quantidade total produzida pelo cartel. Como as empresas possuem os mesmos custos, irão produzir a mesma quantidade, daí que a quantidade de cada empresa será de $55/2 = 27{,}5$. No equilíbrio de Cournot obtemos uma quantidade de 36,7 para cada empresa.

b)

Vermelho	Azul	
	Coopera	Não Coopera
Coopera	$ 1.512,50; $ 1.512,50	$ 1.259,50; $ 1.680,86
Não Coopera	$ 1.680,86; $ 1.259,50	$ 1.343,22; $ 1.343,22

c) O equilíbrio de Nash, que envolve ambos os jogadores não cooperando (verifique!) é Pareto-ineficiente, quando comparado com o resultado em que ambos cooperam.

4.6) a) Caso as empresas se comportem de forma não cooperativa, elas irão agir de acordo com o modelo de Cournot, e teremos que: $q_i = 12$, $p = 16$ e os lucros de cada empresa serão de \$ 144.

b) O preço de equilíbrio será dado por $p = 40 - (5\ q_i) = 40 - 30 = \$\ 10$

c) Na solução de Bertrand temos que $p = CMg$ e assim $p = 4$. Com isso $D(p) = 36$ e assim a produção de cada empresa será de $36/2 = 18$. O lucro será nulo.

4.7)

$$\Pi_i = \begin{cases} (p_i - c)\ \text{Min}\ \{220 - 2p_i, 150\}\ \text{se}\ p_i < p_j \\ \{(p_i - c)\ (110 - p_i)\}\ \text{se}\ p_i = p_j \\ 0,\ \text{se}\ p_i > p_j,\ p_i \geq 35 \\ (p_i - c)\ (220 - p_i - 150\}\ \text{se}\ p_i > p_j,\ p_j < 35 \end{cases}$$

4.8) Os preços das empresas são $p_1 = p_2 = 12$. Cada empresa produz 10 unidades e o lucro de cada empresa será de \$ 100.

4.9) O preço será dado por $p = \$\ 2{,}50$. Assim, o lucro de cada empresa será de: \$ 75.

4.10) O número ótimo de garimpeiros será 7,5 garimpeiros. Já o número efetivo será 15 garimpeiros.

CAPÍTULO 5

5.1)

a) O dilema do prisioneiro não é um jogo estritamente competitivo: os dois jogadores preferem as recompensas de (Coopera, Coopera) às recompensas de (Não Coopera, Não Coopera).

b) A batalha dos sexos não é um jogo estritamente competitivo: os dois jogadores preferem sempre coordenar as suas decisões a não coordenar.

c) O jogo do comércio internacional possui a mesma estrutura do dilema do prisioneiro, portanto não é um jogo estritamente competitivo.

d) O jogo de coordenação do padrão tecnológico possui a mesma estrutura da batalha dos sexos, por isso não é um jogo estritamente competitivo.

5.2) Há dois equilíbrios nesse jogo: (α, A) e (α, C)

5.3) Não tem solução por minimax-maximin.

5.4) A representação estratégica do jogo do par ou ímpar:

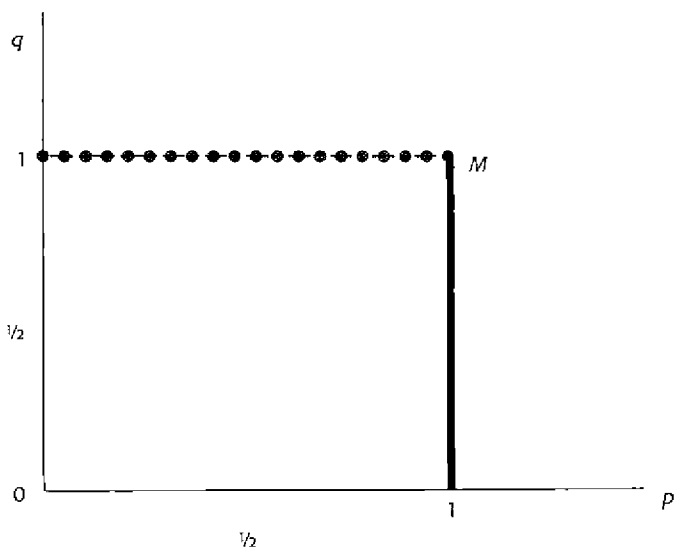
	Jogador que Escolheu Ímpar	
Jogador que Escolheu Par	**Par**	**Ímpar**
Par	1, −1	−1, 1
Ímpar	−1, 1	1, −1

Trata-se de um jogo estritamente competitivo, pois não há resultado do jogo que seja simultaneamente preferível a qualquer outro pelos dois jogadores simultaneamente. Não há uma solução pelo maximin.

5.5)

a) Não há como atribuir probabilidades às estratégias de qualquer um dos dois jogadores que gere um resultado melhor do que jogar a estratégia estritamente dominante de cada jogador. Assim, não há valor de q para o Jogador 2 que torne o Jogador 1 indiferente em relação à probabilidade de jogar I, ou seja, p. O Jogador 1 irá maximizar sua recompensa se fizer $p = 1$. Da mesma forma, o Jogador 2 fará $q = 1$.

b) Para apresentar graficamente as funções de melhor resposta de cada jogador, vamos atribuir as probabilidades para cada estratégia de cada jogador:
A função de melhor resposta do Jogador 1 está representada na linha contínua e a função de melhor resposta do Jogador 2 está na linha pontilhada.



5.6) Ponto de sela : (B, W)

5.7) Obtemos: q = 1/2 e p = 0

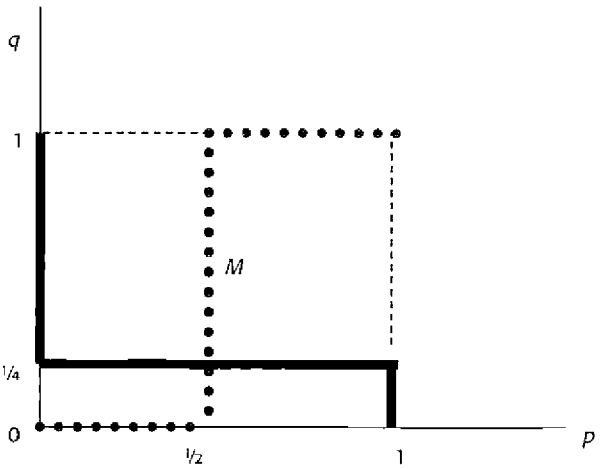
5.8) a) Reescrevendo o jogo temos:

	Von Kluge	
Bradley	**Atacar**	**Recuar**
Avançar	−1, 1	1, −1
Aguardar	2, -2	0, 0

b) O jogo possui não possui ponto de sela.

c) q = ¼ e p = ½.

d)



A função de melhor resposta do general Bradley está representada na linha contínua e a função de melhor resposta do marechal Von Kluge está na linha pontilhada.

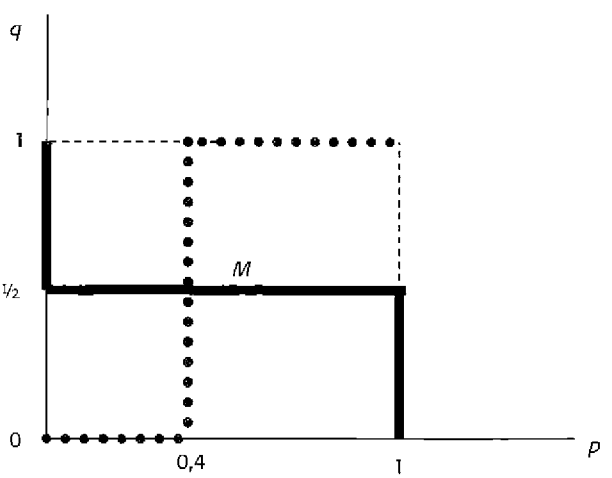
5.9)

a) É estritamente competitivo. Uma maior chance de fazer o gol, significa simultaneamente uma menor chance de defesa do goleiro.

b) Não possui ponto de sela

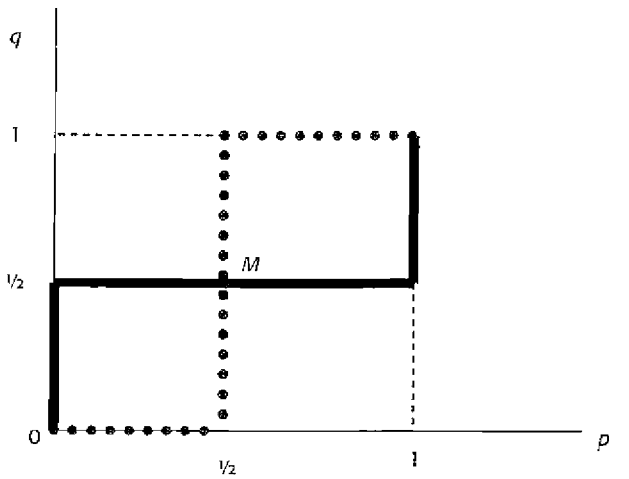
c) q = 0,5 e p = 0,4

d) Representando graficamente, temos que:



A função de melhor resposta do batedor está representada na linha contínua e a função de melhor resposta do goleiro está na linha pontilhada. O equilíbrio em estratégias mistas é dado por: {(0,4 , 0,6), (½ , ½)}

5.10) $q = ½$ e $p = ½$. *Sendo assim, o equilíbrio em estratégias mistas é:* $\{(½, ½), (½, ½)\}$
A representação gráfica é dada pela figura abaixo, onde a linha contínua representa a melhor resposta de SysOp e a linha pontilhada a melhor resposta de Antivírus.

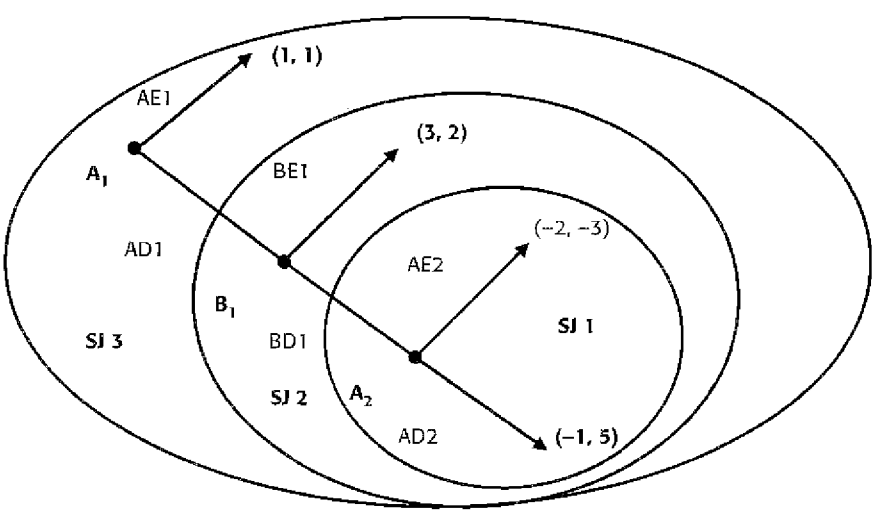


CAPÍTULO 6

6.1)

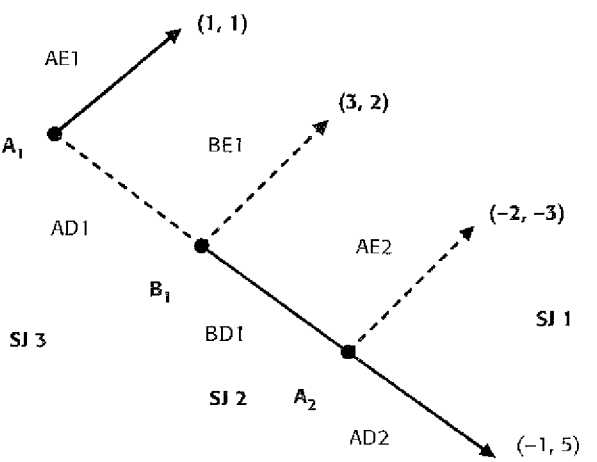
a) Há três equilíbrios de Nash: ((AE1, AE2), BD1), ((AE1, AD2), BD1), ((AD1, AE2), BE1).

b) Vamos identificar os subjogos do jogo:



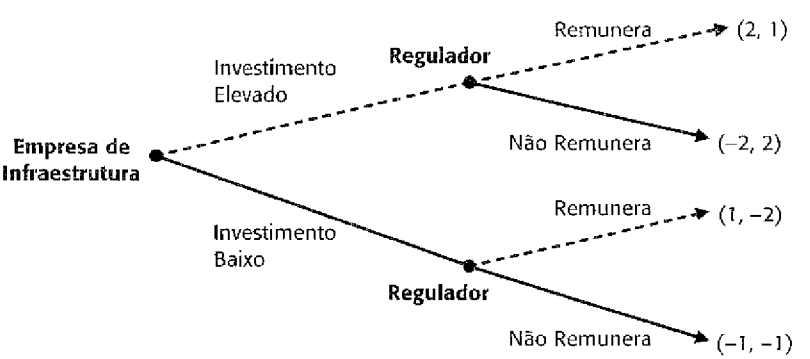
c) O primeiro equilíbrio de Nash ((AE1, AE2), BD1) incorpora uma ação para o primeiro jogador que não é a melhor resposta se o subjogo 1, (SJ 1), é atingido. Caso SJ 1 seja atingido é melhor jogar AD2 e não AE2. Assim, não é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. No caso de o equilíbrio de Nash ((AE1, AD2), BD1), AD2 é a melhor resposta do jogador A no SJ 1, BD1 é a melhor resposta do jogador B no SJ 2, pois dado que o jogador A irá jogar AD2, B conseguirá uma recompensa de 5 contra uma recompensa de 2 que ele conseguiria se jogasse BE1 e, finalmente, antecipando que o resultado final do jogo seria uma recompensa de -1, a melhor resposta de A é jogar AE 1 no SJ 3, garantindo uma recompensa de 1. Nesse caso temos um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. É fácil ver que ((AD1, AE2), BE1) não é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, pois incorpora a ação AE2 para o jogador A, que não é a melhor resposta no subjogo 1.

d) Aplicando indução reversa vem:



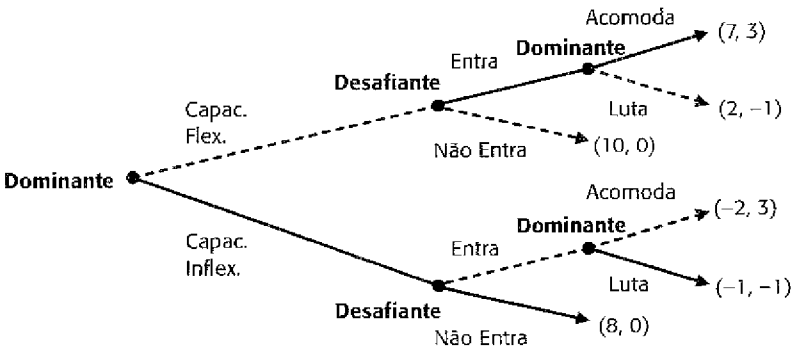
e) A solução do jogo não é um ótimo de Pareto: ((AD1, AE2), BE1) fornece um resultado superior para os dois jogadores, assim como ((AD1, AD2), BE1).

6.2) Vamos aplicar o método da indução reversa ao jogo da regulação.



O que nos fornece o resultado: (Investimento Baixo, Não Remunera).

6.3) A solução do jogo da Figura 6.9 por indução reversa:



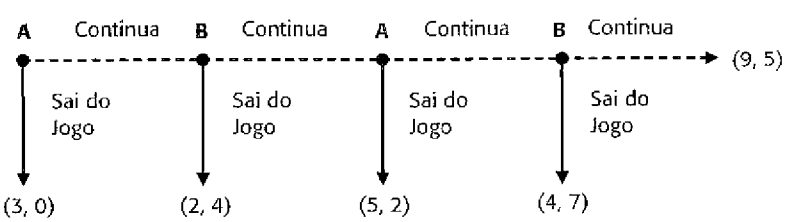
6.4) Nesse caso teríamos que o regulador continuaria não remunerando o investimento. Uma redução de 0,5 nas recompensas do regulador não seria suficiente para alterar o seu comportamento.

6.5) Nesse caso o movimento estratégico da empresa Dominante não é suficiente para impedir a entrada: a Dominante escolhe a capacidade flexível, a Desafiante entra e a Dominante acomoda.

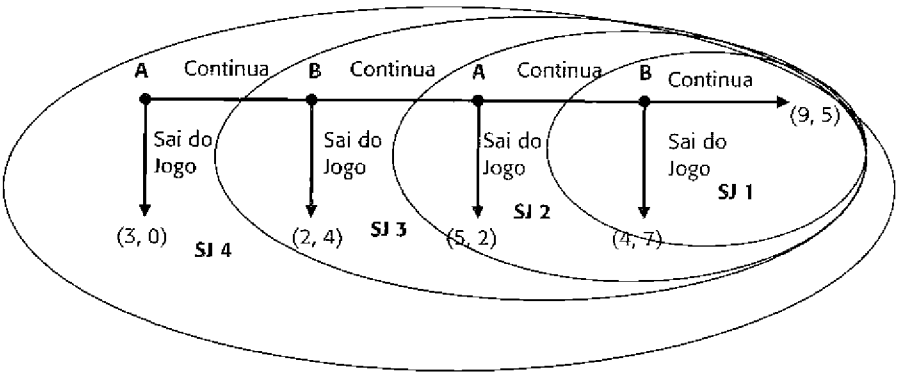
6.6) a)

	Jogador B			
Jogador A	**Continua, Continua**	**Continua, Sai do Jogo**	**Sai do Jogo, Continua**	**Sai do Jogo, Sai do Jogo**
Continua, Continua	9, 5	4, 7	2, 4	2, 4
Continua, Sai do Jogo	5, 2	5, 2	2, 4	2, 4
Sai do Jogo, Continua	3, 0	3, 0	3, 0	3, 0
Sai do Jogo, Sai do Jogo	3, 0	3, 0	3, 0	3, 0

b) Solução por indução reversa:



c) Para determinar o equilíbrio perfeito: há 4 equilíbrios de Nash: ((Sai do Jogo, Continua), (Sai do Jogo, Continua)), ((Sai do Jogo, Continua), (Sai do Jogo, Sai do Jogo)), ((Sai do Jogo, Sai do Jogo), (Sai do Jogo, Continua)), ((Sai do Jogo, Sai do Jogo), (Sai do Jogo, Sai do Jogo)). Vejamos agora quantos subjogos há nesse jogo:

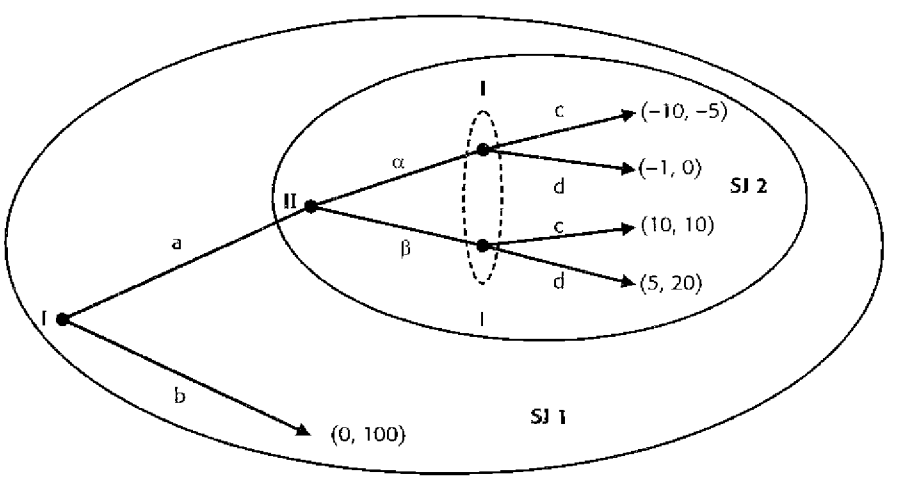


Há apenas o equilíbrio de Nash ((Sai do Jogo, Sai do Jogo), (Sai do Jogo, Sai do Jogo)) como equilíbrio perfeito em todos os subjogos.

6.7) a) representando na forma estratégica:

	II	
I	α	β
a, c	−10, −5	10, 10
a, d	−1, 0	5, 20
b, c	0, 100	0, 100
b, d	0, 100	0, 100

b) Eis os subjogos do jogo:



c) Apenas o equilíbrio ((a, c), β) contém e melhor resposta de I em SJ 2. Logo, apenas esse equilíbrio é perfeito em subjogos.

6.8) No equilíbrio, a quantidade produzida pela empresa líder será de 998 unidades, a quantidade da seguidora será de 499 unidades, e o preço de mercado será de $ 251,50.

6.9) As diferenças estão expostas no quadro abaixo, supondo-se a função de demanda do exercício 4.1, ou seja, $122 - 0{,}5(q_1 + q_2)$ e o custo das empresas é $2q_i$.

	Q1	Q2	Quantidade TOTAL	Lucro de 1	Lucro de 2	Preço
Equilíbrio de Cournot	80	80	160	3200	3200	42
Equilíbrio de Stackelberg	120	60	180	3600	1800	32

6.10) No equilíbrio, a empresa líder de preço produzirá 48,5 unidades, a oferta das seguidoras será de 34,33 unidades e o preço de mercado será de $ 17,17.

CAPÍTULO 7

7.1)

a) Os subjogos desse jogo em forma estratégica:

		Jogador 2	
Resultado da primeira etapa	**Jogador 1**	**Coopera**	**Não Coopera**
Subjogo a partir de {coopera, coopera}	coopera	2304 , 2304	2112 , 2432
	não coopera	2432 , 2112	2176 , 2176
Subjogo a partir de {coopera, não coopera}	coopera	2112, 2432	1920 , 2560
	não coopera	2240 , 2240	1984 , 2304
Subjogo a partir de {não coopera, coopera}	coopera	2432 , 2112	2240 , 2240
	não coopera	2560 , 1920	2304 , 1984
Subjogo a partir de {não coopera, não coopera}	coopera	2176 , 2176	1984 , 2304
	não coopera	2304 , 1984	2048 , 2048

b) Há somente uma combinação de estratégias que constitui um equilíbrio de Nash em todos os subjogos: a combinação de estratégias em que os dois jogadores não cooperam.

7.2) Vejamos se a empresa automobilística tem algum motivo para se desviar da estratégia em que solicita a peça em liga especial pela entrega urgente no primeiro período e, caso este resultado efetivamente se verifique, pede a mesma peça pela entrega rápida no segundo período; caso contrário pede a peça de aço pela entrega normal. Para isso, temos de verificar se há algum incentivo para que, no segundo período, a empresa automobilística solicite

a peça de aço pela entrega normal. Note que essa é a única possibilidade de desvio, pois não há outro equilíbrio de Nash no segundo período além de (peça em liga especial, entrega rápida) e (peça em aço comum, entrega normal). Como a recompensa da empresa automobilística é a mesma tanto no caso em que resulta em (peça em liga especial, entrega rápida), como no caso em que resulta em (peça em aço comum, entrega normal), a empresa automobilística nada ganha se desviando de sua estratégia.

7.3) Nesse caso o fornecedor não deveria acreditar na promessa da empresa automobilística, pois a empresa automobilística ganha mais não cumprindo o acordo e pedindo a peça em aço comum no segundo período (recompensa de 2 ao pedir a peça em aço comum pela entrega normal, contra uma recompensa de 1 ao pedir a peça em liga especial pela entrega rápida).

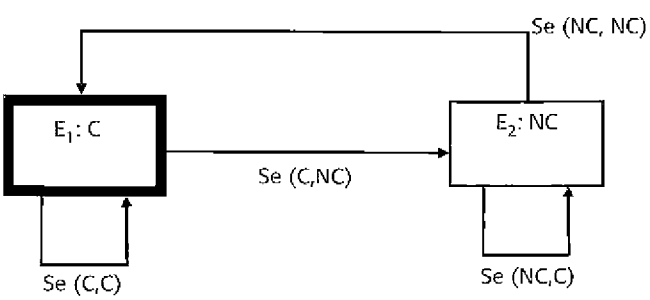
7.4) O jogo-base é dado por:

	Jogador 2	
Jogador 1	**Coopera**	**Não Coopera**
Coopera	1, 1	−1, 2
Não Coopera	2, −1	0, 0

Desse modo, para que a estratégia de iniciar cooperando, e a partir daí alternar (Não Coopera, Não Coopera) com (Coopera, Coopera) seja um equilíbrio de Nash perfeito nesse dilema dos prisioneiros infinitamente repetido é necessário que:

$$\frac{1}{1-\delta^2} > 2 \therefore \delta > \sqrt{5}$$

7.5) Eis a representação da estratégia Pavlov em diagrama:



7.6) Caso o jogador adote a estratégia de iniciar cooperando e se manter assim indefinidamente: $3 + 3\delta + 3\delta^2 + ... = 3 / (1 - \delta)$. Já caso o jogador abandone esta estratégia, digamos, no primeiro período, sua recompensa será: $5 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + ... = 5 + [1 / (1 - \delta)]$. Desse modo, será vantajoso para os jogadores que haja cooperação, caso o fator de desconto seja: $\delta > 1/2$.

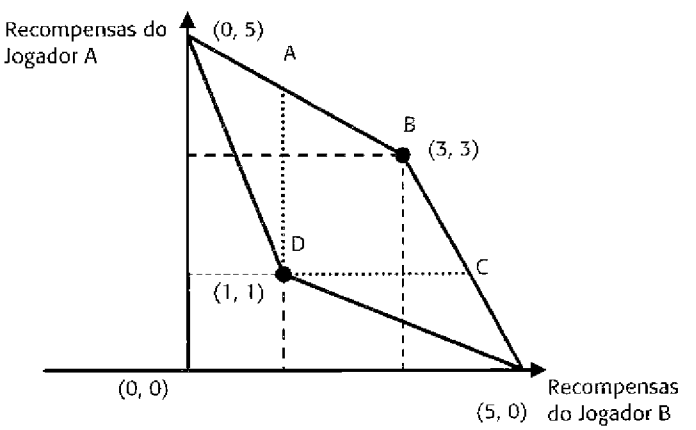
7.7) Se um dos jogadores adota a estratégia olho-por-olho, e o outro jogador decide não cooperar, o jogador que decidiu não cooperar ganha 5 na primeira rodada do jogo mas, a partir daí, deve induzir o outro jogador a cooperar de novo. Para isso, ele deverá cooperar na jogada seguinte, mesmo sabendo que o outro jogador não irá cooperar, para induzir a cooperação a partir da terceira rodada. Desse modo, valerá a pena cooperar sempre desde que: $3 + 3\delta + 3\delta^2 + ... > 5 + 0\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + ...$ Ou seja, desde que $\delta > 2/3$.

7.8) Condição para que haja cooperação: $\delta > 0{,}9$

7.9) Temos que:

$$\delta > \frac{2000 - 1600}{2000 - 1200} \therefore \delta > \frac{1}{2}$$

7.10) O Paralelogramo ABCD contém os equilíbrios possíveis.



CAPÍTULO 8

8.1) Da análise do jogo, para que seja interessante contratar é necessário assim que: $4p - 2 > -p$, ou que $p > 0{,}4$. Substituindo na Figura 8.3(c) do texto o valor $p = 0{,}4$ obtemos:

Figura 8.3 (c): O Jogo da Subcontratação como Jogo de Informação Imperfeita, em Forma Estratégica ($p = 0{,}4$)

	Empresa Multinacional	
Fornecedor	**C**	**NC**
AR, AR	0,2 , 2	0, −1
AR, AI	(I) **2, −0,4** (c)	(I) **0,6 , −0,4** (c)
AI, AR	−1, 0,4	−0,4, −0,6
AI, AI	0,8 , −2	0,2 , 0

Temos então dois equilíbrios de Nash: um em que a empresa contrata e outro em que ela não contrata, indicando que para este valor ela é indiferente entre contratar e não contratar. O leitor pode verificar que para um p ligeiramente maior do que 0,4, digamos 0,41, já

vale a pena para a empresa multinacional contratar; enquanto que para um p ligeiramente inferior de 0,39 já não vale a pena a contratação.

8.2) O equilíbrio de Nash bayesiano nesse jogo é: {(AR,AI),NC}.

8.3) Teremos então dois tipos de empresas. Empresa 1 de custos elevados:

Empresa 1 de Custos Elevados ($p = 0,9$)	**Empresa 2**	
	Investe	**Pega Carona**
Investe	1, 5/2	1, 4
Pega Carona	4, 5/2	0, 0

E empresa 1 de custos baixos:

Empresa 1 de Custos Reduzidos ($1 - p = 0,1$)	Empresa 2	
	Investe	Pega Carona
Investe	3, 5/2	3, 4
Pega Carona	4, 5/2	0, 0

Isso nos leva à forma estratégica bayesiana em que I = Investe e PC = Pega Carona:

	Empresa 2	
Empresa 1	**I**	**PC**
I, I	1,2 , 2,5	**1,2 , 4**
I, PC	1,3 , 2,5	0,9 , 3,6
PC, I	3,9 , 2,5	0,3 , 0,4
PC, PC	**4 , 2,5**	0, 0

Com isso, temos dois equilíbrios de Nash bayesianos. No primeiro equilíbrio a Empresa 1 investe, qualquer que seja o seu tipo, e a Empresa 2 apenas pega carona, ou seja, o primeiro equilíbrio assinalado em negrito na primeira linha segunda coluna: ((I,I), PC)). No segundo equilíbrio a Empresa 1 pega carona, qualquer que seja o seu tipo, e a Empresa 2 investe: é o equilíbrio ((PC,PC), I) na última linha assinalado em negrito. Como nos dois casos uma das empresas pega carona enquanto que a outra investe, é muito provável que a joint-venture não seja formada.

8.4) Se a probabilidade do jogador ser agressivo é de 10%, isso significa que $1 - p = 0,1$ e, portanto, $p = 0,9$ pois representamos inicialmente as ações do jogador conciliador. O equilíbrio de Nash bayesiano neste caso é dado pelo Jogador 1 cooperando e pelo Jogador 2 cooperando se for do tipo conciliador e não cooperando se for do tipo agressivo. Se $p = 0,2$ o equilíbrio de Nash bayesiano é dado pelo Jogador 1 não cooperando e pelo Jogador 2 cooperando se for do tipo conciliador e não cooperando se for do tipo agressivo.

8.5)

a) Se a empresa 2 tiver custo igual a $2q_2$, as duas empresas produzirão a mesma quantidade: 32,7.

b) Se a Empresa 2 tiver custo igual a $4q_2$, a empresa 1 produzirá 33,33 unidades e a Empresa 2 produzirá 31,3 unidades.

8.6) $b - pa = 10 - (0,2)\,30 = 10 - 6 = 4$. O governo deve fazer $\theta = 1$, vendendo com certeza desde que obtenha o valor mínimo.

8.7) O jogador 1 ganha oferecendo $ 10 milhões.

8.8) O jogador 1 ganha oferecendo $ 20 milhões mas paga apenas $ 12 milhões, lance do segundo jogador.

8.9) a) $\frac{v_1}{2}$ e $\frac{v_2}{2}$; e b) idem.

8.10) O jogador 1 poderá oferecer $ 20 milhões pelo objeto do leilão, por ter informações inadequadas quanto às distribuições das avaliações dos outros jogadores, e descobrir desapontado que não precisa ter oferecido tanto.

CAPÍTULO 9

9.1) Considere o equilíbrio agregador (O, O). A contratante irá contratar se:

$$2p + (-2)(1 - p) > 0$$

Desse modo, contratar será a escolha ótima se $p > 1/2$, não contratar será a escolha ótima se $p < 1/2$, e a contratante será indiferente se $p = 1/2$.

9.2) Não existe equilíbrio separador com (NO, O), pois a prestadora não-confiável não oferece, e também não há equilíbrio separador com (O, NO), pois a prestadora não-confiável irá oferecer. Vejamos o equilíbrio agregador que contenha (O, O). Nesse caso $q = p$. Contratar será a escolha ótima se:

$$2p + 0(1 - p) > 0 \text{ ou seja, se } p > 0$$

Portanto, há um equilíbrio agregador em que temos ((O, O), C). Por último, não há equilíbrio agregador que contenha (NO, NO): para nunca contratar teríamos de ter $q < 0$

9.3) a) Pouco produtivos: $\frac{dU_1}{dt} = 1 - t = 0 \therefore t = 1$ Muito produtivos: $\frac{dU_2}{dt} = 2 - 0,5t = 0 \therefore t = 4$

b) $(5/4)t$

9.5) Há um equilíbrio agregador ((NPG, NPG), (Subalterno, Subalterno)) e há um equilíbrio separador em ((PG, NPG), (Chefia, Subalterno)).

9.6) A certificação tem de ser custosa para emitir um sinal significativo.

9.7) Como é um jogo muito simples, pode ser resolvido por indução reversa. A empresa multinacional contrataria desde que $p(x) > (1 - p)(y)$. Assim, temos que a empresa contrata desde que $p > y/(x + y)$.

9.8) A empresa multinacional contrataria desde que $px > |-x|(1 - p)$, ou seja, desde que $p > ½$.

9.9) O equilíbrio será agregador, com todas as empresas multinacionais oferecendo contratos e todos os fornecedores aceitando.

9.10) Se $p < ½$ o mercado entrará em colapso, pois nenhuma empresa multinacional contratará nenhum fornecedor estrangeiro.

Bibliografia Sugerida

Para os leitores iniciantes em jogos, sugerimos, de Ken Binmore, *Fun and Games* (Lexington, Massachusetts, D. C. Heath and Company, 1992); de Prajit K. Dutta, *Strategy and Games: Theory and Practice* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1999); também *Games of Strategy*, de Avinash Dixit e Susan Skeath (Nova York, W. W. Norton & Company, 2004); e o livro de H. Scott Bierman e Luis Fernandez: *Game Theory with Economic Applications* (Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1998).

Outra excelente referência é o livro de Martin J. Osborne, *An Introduction to Game Theory* (Nova York, Oxford University Press, 2004). Um bom panorama geral é oferecido pelo livro de Herbert Gintis, *Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction* (Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 2000).

Para os leitores já adiantados, as opções são os livros de Roger B. Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict* (Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1991); de Drew Fudenberg e Jean Tirole, *Game Theory* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1991); de Fernando Vega-Redondo, *Economics and the Theory of Games* (Cambridge, Cambridge University Press, 2003); de Martin J. Osborne e Ariel Rubinstein, *A Course in Game Theory* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1994); e os três volumes que compõem o *Handbook of Game Theory*, editados por Robert Aumann e Sergio Hart pela Elsevier.

O livro de David M. Kreps, *Microeconomic Theory* (Nova York, Harvester Wheatsheaf, 1990) e o livro de Andreu Mas-Collel, Michael D. Whinston e Jerry R. Green, *Microeconomic Theory* (Nova York, Oxford University Press, 1995) também contêm excelentes capítulos sobre teoria dos jogos.

Para os exercícios, além dos livros citados anteriormente, foi bastante útil o livro de Mônica Viegas de Andrade e Luiz Fernando Alves, *Microeconomia: Exercícios resolvidos da ANPEC* (Belo Horizonte, Editora da UFMG, 1994).

A análise da batalha do mar de Bismarck foi originalmente apresentada por O. Haywood, em seu artigo "Military Decisions and Game Theory" no *Journal of the Operations Research Society of America*, de novembro de 1954. Aqui empreguei a versão apresentada na primeira edição do livro *Games of Strategy*, de Avinash Dixit e Susan Skeath (Nova York, W. W. Norton & Company, 1999). A análise da batalha de Mortain no exercício 5.8 pode ser encontrada no mesmo artigo.

Algumas vezes os livros-texto de teoria dos jogos são pouco gentis com o leitor iniciante e não aprofundam a discussão acerca das justificativas para que se estude jogos. Em parte isso se justifica porque a questão do valor instrumental da teoria dos jogos é controvertida, mesmo entre os teóricos de jogos. Contudo, acredito ter expressado aqui uma visão do valor do estudo de teoria dos jogos que é majoritária entre os analistas e que não provocaria grandes controvérsias.

O autor que talvez mais explicitamente apresenta essa visão do valor do estudo de teoria dos jogos que empreguei, e que é muito gentil com o leitor iniciante, é John McMillan em seu livro *Games, Strategies and Managers: how managers can use game theory to make better business decisions* (Nova York, Oxford University Press, 1992). Foi também McMillan quem chamou a atenção para a utilidade das ideias de Popper para a compreensão do valor da teoria dos jogos. Essas ideias podem ser encontradas em *Lógica das Ciências Sociais*, de Karl Popper (Rio de Janeiro, Tempo Brasileiro, 1999). Essa opção por Popper, contudo, é estritamente pessoal. A literatura sobre metodologia das ciências é vasta, diversificada e repleta de controvérsias, e as ideias de Popper são apenas uma das possibilidades.

Utilizei também a citação de Roger B. Myerson em seu livro *Game Theory: Analysis of Conflict* (Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1991) por considerá-lo uma das autoridades em jogos mais capacitadas a nos ensinar sobre a importância de um modelo bem-especificado. Seu livro é uma referência essencial quando se trata de teoria dos jogos.

A ilustração da guerra de preços do mercado europeu de automóveis pode ser encontrada no *Financial Times* ("Ford slashes UK price of C-Max", em 24/9/2004, e "Price war prompts Fiat to cut costs", em 25/9/2004). A história e os problemas da Opep podem ser encontrados no artigo de James L. Williams "Oil Price History and Analysis", acessado em 5/8/2005 em http://www.wtrg.com/prices.htm.

A atuação da Du Pont no mercado de dióxido de titânio está no livro de Luís M. B. Cabral, *Introduction to Industrial Organization* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 2000). Sobre a tentativa de aquisição hostil da Leica, ver

o *Financial Times* ("Leica launches takeover defence", em 1/7/2005, e "Danaher bids $950m for Leica", em 27/7/2005).

O papel do golfe (e de jantares em clubes fechados) no mundo dos negócios norte-americano foi abordado por Eric Posner em seu livro *Law and Social Norms* (Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 2000).

Eis algumas importantes referências adicionais sobre a história da teoria dos jogos. O artigo de Robert J. Leonard, "From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory, 1928-1944" (*Journal of Economic Literature*, v. 33, n. 2, june 1995, p. 730-761) é uma das melhores referências que conheço acerca da contribuição seminal de von Neumann e Morgenstern para o surgimento da teoria dos jogos.

Roger B. Myerson apresenta uma breve mas excelente revisão da evolução da teoria dos jogos em seu artigo "Nash Equilibrium and the History of Economic Theory" (*Journal of Economic Literature*, v. 37, n. 3, sept. 1999). As observações sobre a contribuição de Borel devem a esse artigo e ao artigo de Maurice Frechet, "Commentary on the Three Notes of Emile Borel" (*Econometrica*, v. 21, n. 1, jan. 1953).

Ken Binmore apresenta a contribuição de Zermelo no seu livro *Fun and Games: a Text on Game Theory* (Lexington, Massachusetts, D. C. Heath and Company, 1992), uma referência sempre indispensável em teoria dos jogos. Também fundamental é a sua publicação mais recente, *Playing for Real* (Oxford University Press, Oxford: 2004).

Há um outro artigo do mesmo Robert J. Leonard citado anteriormente, intitulado "Reading Cournot Nash, Reading Nash: The Creation and Stabilisation of the Nash Equilibrium" (*The Economic Journal*, v. 104, n. 424, may 1994), que questiona a ideia de um equilíbrio "Cournot-Nash". Por último, algumas referências históricas também podem ser encontradas no livro de Prajit K. Dutta, *Strategy and Games: Theory and Practice* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1999).

Para as aplicações de teoria dos jogos especificamente à organização industrial, a referência básica ainda é o livro de Jean Tirole, *The Theory of Industrial Organization* (Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1988). Há grande número de livros com aplicações de teoria dos jogos à ciência política, mas recomendaria em especial o livro de Peter C. Ordeshook, *Game Theory and Political Theory: An Introduction* (Cambridge, Cambridge University Press, 1986) e *Game Theory: for Political Scientists*, de James D. Morrow (Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1994).

Além desses livros, sugiro também a consulta aos livros e artigos citados ao longo do livro.

Índice

A

Ação, 4, 19, 44-45, 161, 241-244 *ver também movimento*
Akerlof, George A, 359, 361
Ambiente de leilão de valor comum, 338
Ambiente do leilão, 328, 330
Ameaça crível, 269, 270
Ameaças não-críveis, 241
Aquisição hostil, 15, 18, 380
Arábia Saudita, 16, 17, 97
Assimetria de informação, 37, 360, 361, 365, 371, 374
Atribuição compatível em incentivos, 325
Aumann, Robert J, 37, 38, 179, 379

B

Bacon, Kevin, 112
Batalha de Mortain, 213, 380
Batalha do Mar de Bismarck, 2, 5-9, 172, 173, 176-178, 181-184, 189, 213
Batalha dos sexos, 109-110, 115, 212
Bayes, Thomas, 344
Bertrand, Joseph Louis François, 134
Bertrand, modelo de, 134, 137, 138, 141-143, 146, 162-163, 250
Binmore, Ken, 32
Bomba de dinheiro, 27
Borel, Félix Edouard Justin Emile, 35
Bradley, Omar, 213-214
Bulow, Jeremy I, 147

C

Cabral, Luís M, B, 17, 137
Carlos Magno, imperador, 7
Cartel, 33, 38, 107, 126-129, 261-262
CCR, 88, 90 *ver também conhecimento comum da racionalidade, hipótese de*
Chapman, Duane, 97, 98
China, 2, 172
Coalizão, 126, 128, 129, 261, 264
Combinação de estratégias, 56, 93, 178, 228, 233, 275, 276, 289-292, 352
Compromissos garantidos, 111
Condorcet, Marquês de (Marie Jean Antoine Nicolas Caritat), 27, 28
Confúcio, 343
Conhecimento comum da racionalidade, hipótese de, 88 *ver também CCR*
Conhecimento comum, 80-81, 88, 89, 107, 259, 268, 270-271, 305, 314, 318
Conjunto de ações, 44, 45, 52, 58
Conjunto de estratégias, 56, 57 *ver também espaço de estratégias*
Conjunto de informação, 59, 64, 222-226, 231
Conluio tácito, 252, 253, 262, 263
Contrato social, 113
Cournot, Antoine Augustin, 34, 122
Cournot, modelo de, 122-130, 132, 133, 314
Crença atualizada, 350, 351, 352, 358
Crença inicial, 350
Crença prévia comum, 307
Custo marginal, 134, 137, 141, 146
Custos de transação, 279, 282

D

Danaher, 18
Dean, James, 112
Decisões estratégicas, 14

Demanda residual, 140, 141
Desenho de leilões, 301, 327
Diferenciação de produtos, 142, 162, 163 *ver também diferenciação horizontal e diferenciação vertical*
Diferenciação horizontal, 163
Diferenciação vertical, 163
Dilema dos prisioneiros, 110-112, 272, 278, 281, 294
Distribuição a priori, 345
Du Pont, 17, 18, 380
Dubner, Stephen J, 19, 20

E

Edgeworth, Francis Y, 142
Eficiência de Pareto, 102, 126
Einstein, Albert, 259, 261, 282
Eleitor mediano, 147, 151, 152, 154, 155, 158 *ver também teorema do eleitor mediano*
Eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, 84-89, 91-93, 100
Equilíbrio agregador, 353, 354, 358, 359, 366, 367, 376, 377
Equilíbrio de Nash bayesiano, 305, 312, 327, 331
Equilíbrio de Nash estrito, 98-99, 101-102, 304
Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, 221, 227-229, 233, 238, 275-277, 290-291, 340 *ver também equilíbrio perfeito*
Equilíbrio de Nash, 93, 97, 98, 99, 102, 103, 108, 121-169, 221, 305
Equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, 88, 99, 206
Equilíbrio em estratégias mistas, 205, 206, 209, 212-214
Equilíbrio maxmin-minimax, 184, 190
Equilíbrio Pareto ineficiente, 210 *ver também ótimo de Pareto*
Equilíbrio perfeito, 37, 228-231, 238 *ver também equilíbrio de Nash perfeito em subjogos*
Equilíbrio perfeito bayesiano, 343-369
Equilíbrio perfeito em subjogos em jogos infinitamente repetidos, 289
Equilíbrio perfeito em subjogos em jogos repetidos finitos, 271
Equilíbrio separador, 353-355, 359, 367
Equivalência estratégica, 336, 338 *ver também leilões estrategicamente equivalentes*
Espaço de estratégias, 56-58, 73 *ver também conjunto de estratégias*
Estado da natureza, 306
Estados Unidos, 38, 113, 177, 179, 207, 208, 209, 210
Estratégia fracamente dominada, 116
Estratégia fracamente dominante, 83, 84
Estratégia olho-por-olho, 285
Estratégia Pavlov, 286
Estratégia severa, 285-291
Estratégia gatilho, 284, 285, 289
Estratégias contínuas, 122, 147, 250
Estratégias estritamente dominadas, 81-88, 101, 102
Estratégias estritamente dominantes, 81, 83, 88, 101, 102
Estratégias mistas, 171-212
Estratégias puras, 190-192, 206, 209
Estratégias racionalizáveis, 88, 91, 93 *ver também racionalização*
Externalidades, 167

F

Fator de desconto, 283, 284, 287, 289, 290, 291
Ford Motors, 16
Forma estendida, 50-56, 64
Forma estratégica bayesiana, 312
Forma estratégica, 46, 64, 66 *ver também forma normal*
Forma normal, 46, 64, 66 *ver também forma estratégica*
Fuller, Thomas, 79
Função de reação, 140-141, 251-252
Função de recompensa, 47, 48, 57, 123, 325

G

Geanakoplos, John D, 147
Green, Jerry R, 26, 379
Guerra Fria, 38, 113, 177, 178, 179, 206, 207
Guerra Irã-Iraque, 16

H

Harsanyi, John C, 36, 37, 305-307
Hexagon, 18, 19
História do jogo, 61, 216, 222, 266, 272-274, 278, 286, 289-291
Hold-up, 348-349, 355

I

Indução reversa, 35, 231-233
Informação assimétrica, 343-375
Informação completa, 71, 80, 81, 370-371
Informação imperfeita, 61, 307, 308
Informação perfeita, 61, 69, 71, 221, 233, 238
Informação privada, 316, 317, 343, 349-350, 356, 362
Irã, 16
Iraque, 16, 97
Israel, 16

J

Japão, 2, 4, 6, 19, 172, 328
Jogador fictício, 306 *ver também pseudojogador*,
Jogadores impacientes, 289, 297 *ver também jogadores pacientes*
Jogadores pacientes, 289, 297 *ver também jogadores impacientes*
Jogo bayesiano simultâneo, 312, 326
Jogo da caça ao cervo, 113-115
Jogo da contratação, 349-354
Jogo da entrada, 216-221
Jogo da guerra fria, 177, 178, 206, 207
Jogo da localização, 147-150, 158, 161, 162, 250
Jogo da subcontratação, 303, 304, 307-313
Jogo da votação da diretoria, 12
Jogo de combinar moedas, 108, 211, 212
Jogo de prevenção da entrada, 91, 94, 96, 98, 99, 243, 246, 247, 248
Jogo de prevenção de ataque, 189, 190, 192, 193, 199, 206
Jogo do "galinha", 112, 113, 115
Jogo do apadrinhamento, 171, 185, 186, 187, 188
Jogo sequencial, 50-53, 58, 64-66, 68, 69, 71, 216, 221, 226, 228, 231, 233, 237, 238, 254
Jogo simultâneo, 46, 50, 57, 58, 63-65, 69, 72, 84, 89, 93, 122, 124, 133, 134, 189, 215, 266-268, 277
Jogo-base, 266, 269, 272-278, 282, 286, 289-291, 293-296
Jogos cooperativos, 111
Jogos de estratégia, 14
Jogos de sinalização, 355
Jogos de soma zero, 35, 36, 173, 176, 186 *ver também jogos estritamente competitivos*
Jogos estritamente competitivos, 171-212 *ver também jogos de soma zero*
Jogos não-cooperativos, 34, 111, 279
Jogos repetidos finitos, 267, 271, 273, 276, 288, 291
Jogos repetidos infinitos ou jogos infinitamente repetidos, 267, 271, 278, 283, 285, 286, 288, 289
Jogos repetidos, 259-299

K

Khanna, Neha, 97, 98
Klemperer, Paul D, 147n

L

Lae (Papua – Nova Guiné), 2-4, 172
Lance mínimo, 328
Lei dos rendimentos marginais decrescentes, 164, 165

Leica Geosystems, 18
Leilão de lances ascendentes, 328
Leilão de lances descendentes, 328
Leilão de lances simultâneos, 328
Leilão de múltiplas unidades, 329
Leilão de primeiro preço, 329-331, 337
Leilão de segundo preço, 329, 334 *ver também leilão de Vickrey*
Leilão de uma unidade, 329
Leilão de Vickrey, 329, 334-336, 338 *ver também leilão de segundo preço*
Leilão holandês, 328, 329, 336, 337
Leilão inglês, 329, 336, 337, 338
Leilão oral, 328, 329
Leilões abertos, 328, 336
Leilões de envelopes lacrados, 328
Leilões estrategicamente equivalentes, *ver equivalência estratégica*
Leilões fechados, 328
Leonard, Robert J, 35, 381
Levitt, Steven D, 19, 20
Luce, R, D, 178

M

Maldição do vencedor, 329, 338
Mar de Bismarck, 2, 5-9, 172, 173, 176-178, 181-184, 189, 213, 380 *ver também Batalha do Mar de Bismarck*
Mas-Collel, Andreu, 26
Maxmin, 184, 190
McMillan, John, 6, 9, 336
Mecanismo, 105, 113, 193, 207, 313, 316-320, 324-328, 360, 361
Mecanismo direto, 326, 327
Melhor resposta, 88, 90
Melhoria no sentido de Pareto, 102, 266 *ver também melhoria paretiana*
Melhoria paretiana, 102, 355 *ver também melhoria no sentido de Pareto*
Método minimax, 184n, 185, 189, 212-214 *ver também método minimax-maximin*
Método minimax-maximin, 184n, 212-214 *ver também método minimax*
Minimax, 184, 190
Modelo de Bertrand, 134, 137, 138, 141-143, 146, 162, 163, 250 *ver também modelo de determinação simultânea de preços*
Modelo de Cournot, 122, 123, 125, 126, 129, 130, 132, 133, 134, 136, 137, 138, 147, 250, 251, 252, 264, 265, 298, 313, 314, 315 *ver também modelo de determinação simultânea de quantidades*
Modelo de determinação simultânea de preços, 134, 136, 145, 146, 147, 163 *ver também modelo de Bertrand*
Modelo de determinação simultânea de quantidades, 134 *ver também modelo de Cournot*
Modelo de liderança de preços, 250, 252
Modelo de liderança de quantidades, 250, 252 *ver também modelo de Stackelberg*
Modelo de Spence, 359
Modelo de Stackelberg, 250, 252, 254 *ver também modelo de liderança de quantidades*
Morgenstern, Oskar, 35, 171, 381
Morrow, James D, 74, 158, 185, 281
Movimento, 4, 19, 44-45, 161, 241-244 *ver também ação*
Movimentos estratégicos, 241, 242, 249, 270
Musashi, Miyamoto, 41, 215
Myerson, Roger B, 8, 34, 35, 379-381

N

Nash, John F, 36
Newbery, David M, 235n
Nó (da árvore de jogos), 52
Nó final, 52 *Ver também nó terminal*
Nó inicial, 52
Nó predecessor, 52
Nó sucessor, 52
Nó terminal, 52 *ver também nó final*
Nova Zelândia, 336

O

Oligopólio, 33, 34, 250, 252
Opep (Organização dos Países Exportadores de Petróleo), 15-17, 34, 380
Osborne, Martin J, 329, 379
Ótimo de Pareto, 102, 103, 115, 279 *ver também equilíbrio pareto-eficiente*

P

Papua-Nova Guiné, 2, 172
Paradoxo da cadeia de lojas, 260n, 269-271
Paradoxo de Bertrand, 136, 142n
Paradoxo de Condorcet, 27, 28
Paradoxo de Edgeworth, 138, 142, 142n
Pareto, Vilfredo, 102n
Patton, General, 213
Pavlov, Ivan Petrovich, 286, 299, 300
Perigo moral, 343, 369, 370, 373, 374
Ponto de sela, 184, 184n, 185, 190
Ponto focal, 38, 106, 107, 108, 262, 263
Ponto ideal, 151, 152, 154, 155
Popper, Karl, 6, 7, 380
Posner, Eric, 31, 32, 381
Preço cheio, 159
Preço de reserva, 159, 169, 337
Preferências, 27, 28, 30 *ver também preferências racionais*
Preferências intertemporais, 283
Preferências ordinais, 27
Preferências racionais, 27, 30 *ver também relação de preferências racional*
Princípio da revelação, 324, 325, 326
Produtividade marginal, 165
Promessa crível, 237, 249
Promessas não-críveis, 249
Pseudojogador, 306, 307, 309, 349 *ver também jogador fictício*

R

Rabaul, 2, 4
Racionalidade sequencial, 350
Racionalidade, 13, 21-22
Racionalização, 88, 89, 314
Raiffa, H, 178
Ramo (da árvore de jogos), 52
Recompensa esperada, 193-204, 209, 210, 332, 360, 374
Recompensa média descontada, 291, 292, 295, 296
Recompensas condicionais, 332
Recompensas factíveis, 291
Regra de racionamento eficiente, 138
Regras do leilão, 328
Relação binária, 25, 26
Relação de indiferença, 24, 25
Relação de preferência, 24, 25, 26, 27, 248, 272
Relação de preferência estrita, 24, 25
Restrição de compatibilidade de incentivos, 321, 370, 371
Restrição de racionalidade individual, 321
Rousseau, Jean-Jacques, 113, 114

S

Schelling, Thomas C, 38, 106, 179
Selten, Reinhard, 36, 37, 269
Spence, Michael, 359, 361
Stackelberg, Heinrich von, 250, 252, 254
Subjogo, 221-231
Subjogos próprios, 227, 350

T

Taxa de desconto, 283, 284, 289
Teorema de Bayes, 343-344, 347, 352-354
Teorema do eleitor mediano, 147, 151, 158 *Ver também eleitor mediano*
Teorema popular, 291, 295, 297
Teoria da escolha racional, 23
Tragédia dos comuns, 164, 167
Tzu, Sun, 171, 191, 206

U

União Soviética, 38, 113, 177, 179, 207, 208, 209, 210

V

Valor esperado, 124, 303, 306, 334, 362, 363, 373
Valor presente, 283, 284, 287, 289, 290, 291, 292, 294
Valores independentes privados, 330, 336, 338
Vetores factíveis, 293, 294
Vickrey, William, 329
Voltaire (Arouet, François Marie), 301
Von Kluge, Günther, 213, 214
Von Neumann, John, 35, 171, 181

W

Whinston, Michael D, 26, 379

Z

Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand, 35, 381